I

$A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ $\quad A \simeq B \iff \exists\ S$ invertibile $\mid B = S^{-1}AS$

<u>PROPOSIZIONE</u> : Se $A \simeq B \Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$ polinomi caratteristici delle matrici A e B.

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$; $\quad P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = |B - \lambda I|$

$$|B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| = |S^{-1}AS - S^{-1}\lambda I S| =$$
$$= |S^{-1}(\lambda - \lambda I)S| = |S^{-1}|\,|A - \lambda I|\,|S| = |S|^{-1}|A - \lambda I|\,|S| = |A - \lambda I|$$

E' VERO IL VICEVERSA? Verificare e cercare controesempio

Se λ_0 è radice di un polinomio $p(\lambda) \Rightarrow$ per il Teorema di RUFFINI, $(\lambda - \lambda_0)$ divide il polinomio, $p(\lambda)$, cioè
$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$ con $q(\lambda)$ non divisibile per $(\lambda - \lambda_0)$.
m (che rappresenta il grado del polinomio) è detto <u>MOLTEPLICITA'</u> della radice λ_0.

Se λ_0 è radice caratteristica di $p(\lambda) = |A - \lambda I| \Rightarrow m$ è detto

<u>MOLTEPLICITA' ALGEBRICA</u> di λ_0.

Pensato λ_0 come autovalore di $T: V \to V$ con $A = [T]_B$
$\Rightarrow$ si considera E_{λ_0} l'autospazio relativo e si chiama
<u>MOLTEPLICITA' GEOMETRICA</u> di λ_0 la dimensione di tale autospazio

<u>PROPOSIZIONE</u>: La molteplicità geometrica di λ_0 è $\leq$ molteplicità algebrica di λ_0

<u>DIMOSTRAZIONE</u>: Sia $T: V \to V$ con $\dim V = n$, λ_0 suo autovalore e $\dim E_{\lambda_0} = k$ $\Rightarrow$ sia $B_{E_{\lambda_0}} = \{v_1, \dots, v_k\}$ e formo $B_V = \{v_1, \dots, v_k, V_1, \dots, V_{n-k}\}$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1(k+1)} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & 0 & & \vdots & \alpha_{2(k+1)} & \cdots & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_0 & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \lambda_0 & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \alpha_{n(k+1)} & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |[T]_B - \lambda I| = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1(k+1)} & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & 0 & & \vdots & \alpha_{2(k+1)} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & 0 & 0 & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \lambda_0 - \lambda & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 & & & \vdots \\ & & & & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{(k+1)(k+1)} - \lambda & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & \vdots & & \\ & & & & 0 & \alpha_{1n} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow = (\lambda_0-\lambda)(\lambda_0-\lambda)\cdots(\lambda_0-\lambda)\,q(\lambda) = (\lambda_0-\lambda)^k\,q(\lambda)$$

$\Rightarrow$ la ~~moltep~~ molteplicità algebrica di $\lambda_0 \geq \underset{\dim E_{\lambda_0}}{\underset{\parallel}{k}}$ ($(\lambda_0-\lambda)$ può dividere $q(\lambda)$)

NOTAZIONE: la molteplicità algebrica di λ_0 si indica con $\mu(\lambda_0)$

ESERCIZIO:

$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \longmapsto (x+y-z,\ y,\ x+z)$

DETERMINARE AUTOVALORI ED AUTOSPAZI

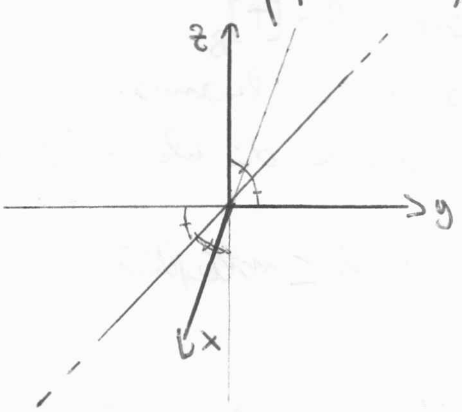
Fissata la base $\overset{C}{\text{canonica}}$ nel dominio e nel codominio

$$\Rightarrow [T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2+1\right) = (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)$$

$\Rightarrow \exists$ un unico autovalore reale λ_0 con $\mu(\lambda_0)=1$

$$\dim E_1 = 1, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} \Leftarrow E_{\lambda_0}$$



III

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 & 0 \\ -3 & -5-\lambda & 0 \\ -3 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((4-\lambda)(-5-\lambda)+18\Big) =$$

$$= (1-\lambda)(-2+\lambda+\lambda^2) = (1-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-1) = (1-\lambda)^2(-2-\lambda)$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ con $\mu(1) = 2$ {$\mathcal{E}$ o è retta o è piano}

$\lambda_2 = -2$ con $\mu(-2) = 1$ {$\mathcal{E}$ è retta}

- $\mathcal{E}_1$ $\begin{pmatrix} +3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$ PIANO

Proposizione: Una matrice A è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ indicato con $T: V \to V$ l'operatore ad essa associato in una base B, cioè $[T]_B = A$, $\Rightarrow \exists$ UNA BASE DI V FORMATA DA AUTOVETTORI DI T.

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" $\exists$ D diagonale ed S invertibile tale che $A = S^{-1}DS \Rightarrow \exists$ base $\tilde{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\} \mid [T]_{\tilde{B}_V} = D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ per definizione
$$T(v_1) = \alpha_{11}v_1 +$$
$$T(v_2) = \alpha_{22}v_2$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = \alpha_{nn}v_n$$
$\Rightarrow$ Ogni $v_j \in \tilde{B}_V$ è autovettore per T.

Analogamente per il viceversa

IV

$\Rightarrow$ CONSIDERANDO L'OPERATORE T, POSSIAMO DARE LA SEGUENTE

Definizione: $T: V \to V$ operatore è diagonalizzabile se $\exists$ una base B_V formata da autovettori di T

Proposizione: $T: V \to V$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ detti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ i suoi autovettori $\Rightarrow E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} = V$

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" T diagonalizzabile $\Rightarrow \exists B_V$ formata da autovettori $\Rightarrow$ Considero U_{λ_j} sottospazio generato dagli autovettori di base relativi all'autovalore λ_j, $\forall j = 1, \dots, k$

ogni $U_{\lambda_j} \subseteq E_{\lambda_j} \Rightarrow U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_j} = V$ PER COME ABBIAMO DEFINITO U_{λ_j}

e $V = U_{\lambda_1} + U_{\lambda_2} + \dots + U_{\lambda_k} \subseteq E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} \subseteq V \Rightarrow \bigoplus_{j=1}^{k} E_{\lambda_j} = V$

Viceversa: posso determinare una base di V unendo le basi degli E_{λ_j} e quindi ho una base di autovettori e perciò T è diagonalizzabile.

Proposizione: T è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ tutte le radici caratteristiche di un polinomio caratteristico ad esso associato sono nel campo su cui è definito V.

e $\dim E_{\lambda_j} = \mu(\lambda_j)$ $\forall \lambda_j$ autovalore di T.

COROLLARIO: SE, DATO L'OPERATORE $T: V \longrightarrow V$, CON $\dim V = n$, GLI AUTOVALORI $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ SONO TUTTI NEL CAMPO SU CUI È DEFINITO V E TUTTI DISTINTI $\Rightarrow$ T È DIAGONALIZZABILE

DIMOSTRAZIONE: ESERCIZIO