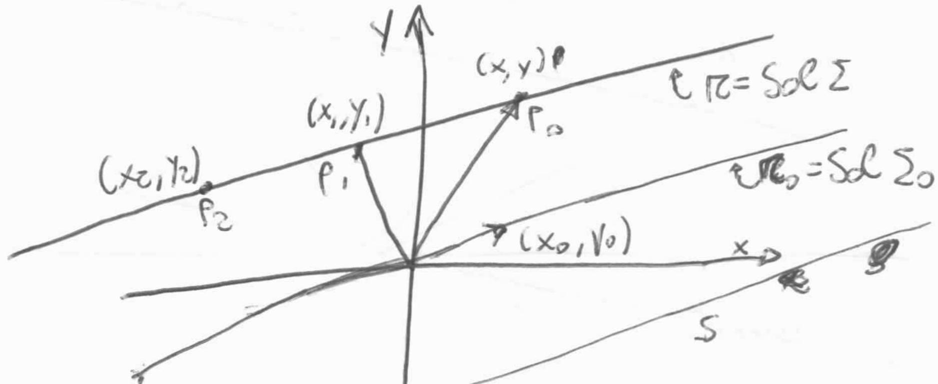
Equazione retta generica nel piano:

$ax + by + c = 0 : \Sigma$



$\Sigma_0 \Rightarrow ax + by = 0$

PER QUANTO DETTO DEGLI SPAZI AFFINI: UN VETTORE GENERICO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ DELLA RETTA È DATO DA:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Ricavo sistema scalare da equazione vettoriale.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = s x_0 + x_1 \\ y = s y_0 + y_1 \end{cases}$$ <u>equazione</u> <u>parametrica</u> della retta r.

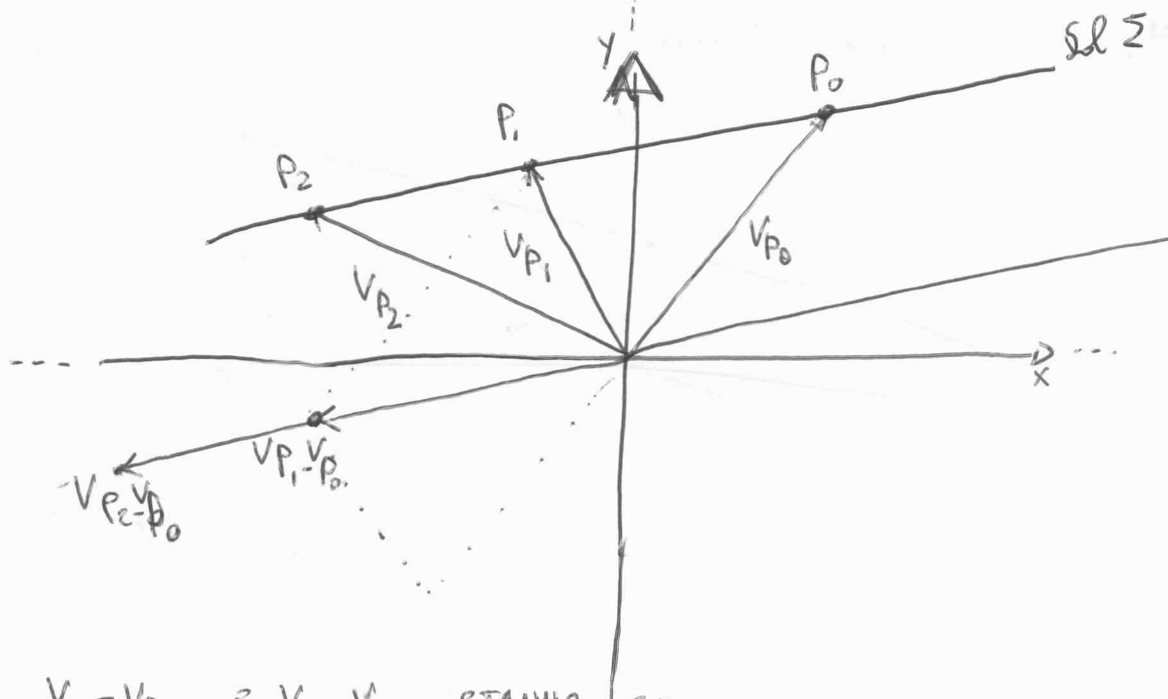
x_0 e y_0 sono i <u>parametri direttori</u> di r. Non sono univocamente determinati → sono determinati a meno di un parametro s.

Due rette nel piano sono parallele se hanno la <u>stessa direzione</u> e quindi se hanno <u>parametri direttori proporzionali</u>.

- Tre punti di $\mathbb{R}^2$ $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ sono allineati quando? [<u>ESEMPIO</u>: $P_0 = (1,2)$, $P_1 = (0,-1)$, $P_2 = (-1,-1)$]

SE CHIAMIAMO V_P IL VETTORE INDIVIDUATO DA P $\Rightarrow$

Come sono messi $V_{P_1} - V_{P_0}$ e $V_{P_2} - V_{P_0}$? SE I PUNTI P_0, P_1, P_2 SONO ALLINEATI?



$\Rightarrow V_{P_1} - V_{P_0}$ E $V_{P_2} - V_{P_0}$ STANNO SULLA STESSA RETTA PER L'ORIGINE E

Se

$V_{P_1}-V_{P_0}$, $V_{P_2}-V_{P_0}$ stanno sulla stessa retta per l'origine, $\Rightarrow$

$\Rightarrow (V_{P_2}-V_{P_0}) = \alpha(V_{P_1}-V_{P_0}) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{pmatrix}$ deve avere rango 1 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ quindi il suo determinante deve essere zero.

$\Rightarrow$ deve essere zero il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{pmatrix},$$

ESSENDO $\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$

QUINDI:

Per vedere se sono punti allineati si crea la matrice

$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$ e si calcola il determinante ~~che~~: SE SONO ALLINEATI deve essere uguale a zero.

Se considero punto generico $P = (x, y)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ $\Rightarrow$
essi sono allineati se

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ottengo così l'equazione della retta. CONSIDERO LA MATRICE (EQUIVALENTE):

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

PONGO IL DETERMINANTE UGUALE A ZERO $\Rightarrow$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

Posso fare anche IL DETERMINANTE DELLA MATRICE 2X2 $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$\Rightarrow$ é l'equazione di una retta passante per due punti.

- Diciamo <u>FASCIO DI RETTE</u> nel piano l'insieme di tutte le rette ottenute come combinazione lineare di due rette date

Cioè date due rette r_1 e r_2 con $r_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ e $r_2: a_2x+a_2y+c_2=0$ →
→ il fascio ha equazione $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$

Il fascio può essere di 2 tipi
- le 2 rette si intersecano (fascio PROPRIO)
- le 2 rette sono parallele (fascio IMPROPRIO)

Considero il sistema formato dalle 2 rette:

- se il rango della matrice incompleta associata è 2, allora lo è anche il rg della matrice completa → le due rette si intersecano in un punto (fascio PROPRIO): IL PUNTO E' DETTO CENTRO DEL FASCIO.
- se il rg della matrice incompleta è 1, il sistema non ha soluzione; il rg della matrice completa può aumentare a 2. In questo caso il fascio è IMPROPRIO.

L'EQUAZIONE DEL FASCIO PUO' ESSERE DATA ANCHE CON UN UNICO PARAMETRO t, SUPPONENDO DI DIVIDERE PER UNO DEI DUE PARAMETRI (NON SONO ENTRAMBI NULLI), AD ESEMPIO λ, E PONENDO $\frac{\mu}{\lambda}=t$:
ABBIAMO COSI' $(a_1x+b_1y+c_1)+t(a_2x+b_2y+c_2)=0$

ATTENZIONE PERO', PERCHE' COSI' FACENDO ABBIAMO TOLTO DAL FASCIO LA RETTA $a_2x+b_2y+c_2=0$, LA CUI EQUAZIONE NON SI OTTIENE PER ALCUN VALORE DI t.