11-03-2013

<u>Definizione</u>: Dato un operatore $T: V \longmapsto V$, $U < V$ è detto INVARIANTE se $\forall u \in U$ $T(u) \in U$.

Esempi: 1. se $U = \{0\}$, $0 \in V$, $\forall T: V \longmapsto V$ $T(0) = 0$.
↳ $\{0\}$ è un sottospazio INVARIANTE BANALE.

2. anche V visto come sottospazio di se stesso è un sottospazio INVARIANTE $\forall T: V \longmapsto V$. => è anch'esso sott. inv. BANALE.

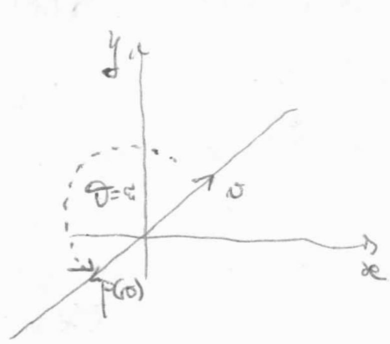
Att! La ricerca è rivolta dunque per ogni ~~spazio~~ sott. inv. NON BANALE.

3. Sia $id: V \longmapsto V$, $v \longmapsto v$, ogni sottospazio di V è invariante.

4. Consideriamo $\rho: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ rotazione in piano $\mathbb{R}^2$ di angolo ϑ in verso antiorario, con $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$.
(Att! se $\vartheta = 0$, la rotazione coincide con l'identità.)
allora analizzo il caso in cui $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, $\mathbb{R}\vartheta$
Quali sono i suoi sottospazi invarianti non banali?

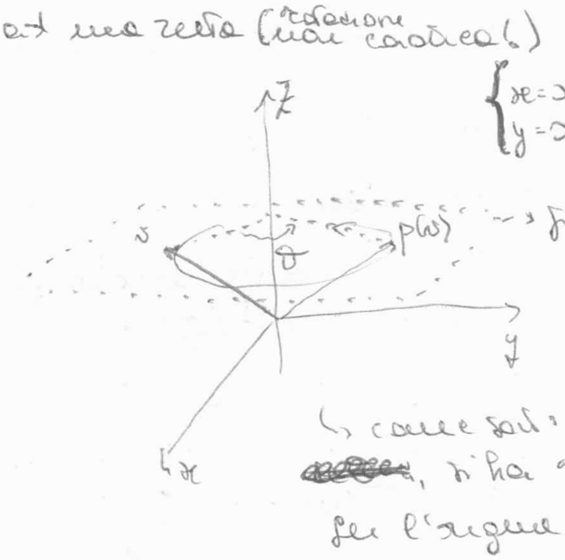
Innanzitutto pensiamo alle presenze di sottospazi di $\mathbb{R}^2$: le rette per l'origine (oltre al vettore nullo $\{0\}$ e $\mathbb{R}^2$ (se stesso)).
Se $0 < \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, v non viene MAI mandato in UN MULTIPLO DI se stesso => nessun sottospazio inv. non banale esiste per la rotazione.

4'. Se $\vartheta = \pi$, ~~v~~ v viene mandato in una retta identica a quella A CUI APPARTIENE nel dominio: OGNI RETTA È sottospazio invariante non banale nel piano $\mathbb{R}^2$ per $\vartheta = \pi$...



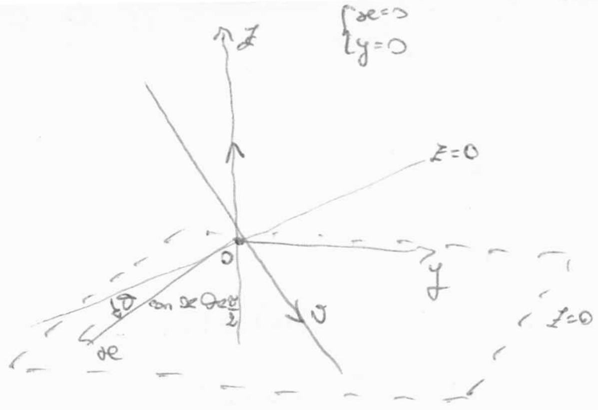
... Nello spazio $\mathbb{R}^3$? La rotazione è intorno ad una retta (rotazione intorno all'asse)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



→ piano di rotazione

↳ come sottospazi di $\mathbb{R}^3$, ~~[illegible]~~, si ha rette e piani passanti per l'origine per ~~[illegible]~~. (J)



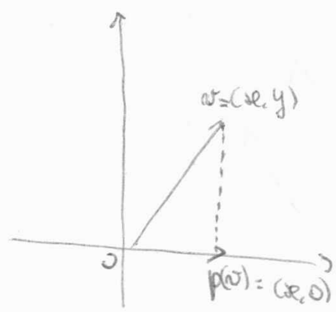
- L'asse di rotazione è sottospazio invariante.
- le rette del piano per $z=0$ sono invarianti per $\forall\theta$?
  - ↳ per $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ la retta per $z=0$ non viene mandata però in se stessa
  - ↳ per $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ l'unico spazio invariante ~~[illegible]~~ unidimensionale è l'asse DI ROTAZIONE
- per $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ il piano perpendicolare all'asse (il cosiddetto piano di rotazione) è sottospazio invariante.

~~[illegible]~~

- tutti i piani del fascio sono invarianti per $\theta=\pi$.

5. Consideriamo la proiezione $p: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x,0)$



- la retta x è invariante
- l'asse y è invariante poiché:
  $(0,y) \longmapsto (0,0)$
  il punto $(0,0)$ è invariante BANALE

Proposizione: Ogni ~~[illegible]~~ autospazio relativo ad un autovalore λ di un operatore $T: V \longmapsto V$ è sottospazio invariante.

Il viceversa non è sempre vero.

DIM: si può sfruttare la definizione di autospazio.

Sia E_λ l'autospazio relativo a λ; se $v \in E_\lambda \Rightarrow T(v)=\lambda v$:

bisogna dimostrare che anche $T(v)=\lambda v \in E_\lambda$, cioè $T(T(v)) \in E_\lambda$.

$T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v)$ è autovettore relativo a λ rispetto all'operatore $T \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ogni ~~sottosp~~ autospazio è sott. invariante.

Per dimostrare che il viceversa non è vero, dare un controesempio per ESERCIZIO.

Att! I sottospazi invarianti sono di più rispetto agli autospazi.

Proposizione: Se U è sottospazio invariante per $T: V \longmapsto V$ e T è invertibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow U$ è invariante anche per $T^{-1}: V \longmapsto V$

DIM: dimostrare che $T^{-1}(u) \in U$. $\forall u \in U$

Hp: dato $u \in U \Rightarrow T(u) \in U$.

Se $w \in U$, w sta anche nel codominio $\Rightarrow \exists\, u \in U \mid T(u)=w \Rightarrow$

$\Rightarrow T^{-1}(w) = T^{-1}(T(u)) = u \in U$

c.v.d.

OSSERVAZIONE: ~~e' autovettore~~ 1) $\dim E_\lambda \geq 1$

2) se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = \{0\}$ => da dimostrare!

Considero $v \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow v \in E_{\lambda_1} \Rightarrow T(v) = \lambda_1 v$ ET

$v \in E_{\lambda_2} \Rightarrow T(v) = \lambda_2 v$

pertanto $\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0$

$\Rightarrow$ o $v = 0$, o $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ cioe' $\lambda_1 = \lambda_2$

ma poiché $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v = 0$

pertanto nell'intersezione fra E_{λ_1} e E_{λ_2} $\exists \{0\}$.

Proposizione: Ad ogni autovettore corrisponde un unico autovalore.

Supponiamo che esistono λ_1 e λ_2 autovalori per $T: V \longmapsto V$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

e che $T(v) = \lambda_1 v$ e $T(v) = \lambda_2 v$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v = 0 \Rightarrow$

o $v = 0$ o $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ MA $v \neq 0$ ESSENDO AUTOVETTORE $\Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$.

c.v.d.

Proposizione: Autovettori relativi ad autovalori diversi per $T: V \longmapsto V$ sono linearmente indipendenti.

DIM: Siano $v_1, \dots, v_k$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $\forall\, i, j \in \{1, \dots, k\}$, con $i \neq j$. => preso $k \leq \dim V$,

TESI: $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

dimostriamo per induzione su k:

1) verifica per $k = 1$ => e' vero

2) Supponiamo vera la proposizione per un numero di vettori pari a $k-1$, e lo dimostriamo per k =>

=> considero la combinazione lineare:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k = 0;$$

considero $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k v_k) = T(0) = 0;$

per la linearità di T:

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_{k-1} T(v_{k-1}) + \alpha_k T(v_k) = 0;$$

$$1)^* \quad \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$

moltiplico la combinazione lineare iniziale per λ_k =>

$$2)^* \Rightarrow \alpha_1 \lambda_k v_1 + \alpha_2 \lambda_k v_2 + \dots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} + \alpha_k \lambda_k v_k = 0$$

sottraggo membro a membro $1)^*$ e $2)^*$:

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) v_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_k)}_{0} v_k = 0$$

=> per ipotesi induttiva $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k) = 0$

$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k) = 0$

$\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$

poiché per Hp $\lambda_i \neq \lambda_k$ $\forall i = 1, \dots, k-1$ $\Rightarrow$ NECESSARIAMENTE $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$,

cioè $\alpha_i = 0$ $\forall i = 1, \dots, k-1$

nella combinazione lineare iniziale, sostituendo, ...!

rimane $\alpha_k v_k = 0$. poiché v_k è autovettore, $v_k \neq 0 \Rightarrow \alpha_k = 0$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti.

$\boxed{\text{cvd.}}$

ESERCIZIO: Sia dato un operatore $T : V \longmapsto V$, e $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ in modo che i primi k vettori di B_V siano in un sottospazio invariante per T.

Caratterizzare $[T]_{B_V}$.