lineare non omogeneo. 10-12-12

Se Σ sistema con n variabili, n equazioni e rango n $\Rightarrow$ è risolubile? Sì. TALE SISTEMA È DETTO SISTEMA DI CRAMER

e Σ è del tipo $AX = B$ $\Rightarrow$ il teorema di R-Capelli dice che Σ ha soluzioni $\Leftrightarrow$ $rg\,A = rg\,(A:B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \in M_{n \times n}$, $(A:B) \in M_{n \times (n+1)}$

in questo caso l'equivalenza è vera cioè:

se $rg\,A = n$ (rango massimo) $\Rightarrow rg(A:B) = n$

pertanto il sistema è sempre risolubile. Allora quante soluzioni ha? $\infty^{n-n} = \infty^0 = 1$

Esiste un modo per determinare questa particolare soluzione: tale soluzione $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ennupla con:

$$x_j = \frac{|C_1(A), \dots, C_{j-1}(A), B, C_{j+1}(A), \dots, C_n(A)|}{|A|}$$

(DOVE LE $C_i(A)$ SONO LE COLONNE DELLA MATRICE A E B IL VETTORE DEI TERMINI NOTI)

Quanto spiegato sopra è indicato come METODO DI CRAMER

$$\Sigma : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

il sistema è risolubile?

innanzitutto va considerata la matrice dei coefficienti:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e considero la matrice con la colonna dei termini noti:

$$(A:B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

pertanto $rg\,A = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

Si nota che $rg\,A = 2$ perché le due righe non sono l'una il multiplo dell'altra E QUINDI:

$$rg\,A = rg\,(A:B) = 2$$

Si considera il sistema lineare omogeneo Σ_0 associato a Σ:

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

ora:

$$(A:B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

pertanto $\Sigma_0 : \begin{cases} x + \frac{1}{3}z = 0 \\ y + \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$

lo spazio ambiente in cui si opera è $\mathbb{R}^3$ e la soluzione equivale a una retta dello spazio ambiente PASSANTE PER L'ORIGINE

$\mathrm{Sol}\,\Sigma_0 = \langle\langle(-1, 2, 3)\rangle\rangle \Rightarrow$ è sottospazio vettoriale CON BASE $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \{ \underbrace{a}_{\text{parametro}}(-1, 2, 3) \} = \{ (-a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R} \}$

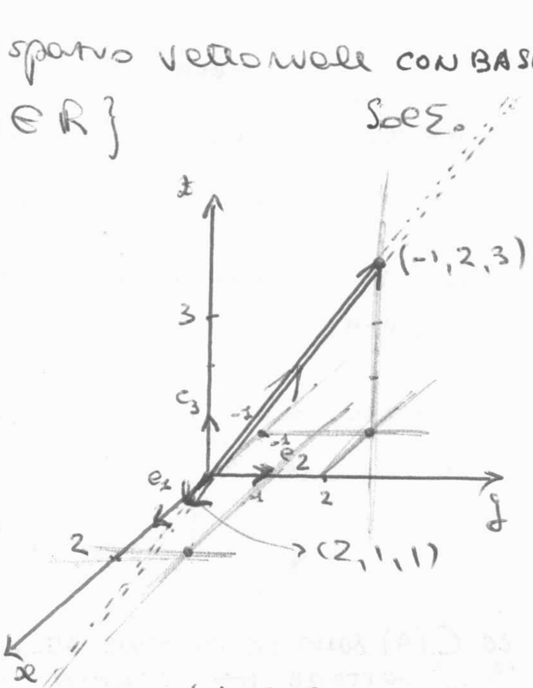
trovata la soluzione generale, invece, risolviamo una soluzione particolare del sistema lineare NON OMOGENEO!

$\Sigma : \begin{cases} x + \frac{1}{3}z = \frac{7}{3} \\ y - \frac{2}{3}z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ una soluzione del Σ SI TROVA DA QUESTO SISTEMA: $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ y = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} \end{cases}$

conferendo a z (parametro) un valore, AD ESEMPIO quello più semplice, ossia $z = 0$:

per $z = 0$ trovo $\left(\frac{7}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right) \Rightarrow$



$e_1 = (1, 0, 0)$
$e_2 = (0, 1, 0)$
$e_3 = (0, 0, 1)$

$\Rightarrow \mathrm{Sol}\,\Sigma$ è costituito dalla somma di questa soluzione particolare + la soluzione generale trovata in precedenza:

$\mathrm{Sol}\,\Sigma = \left\{ \left(\frac{7}{3} ; \frac{1}{3} ; 0\right) + a(-1, 2, 3) \mid a \in \mathbb{R} \right\} =$

si può anche scrivere nel seguente modo:

$= \left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + \{ (-a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R} \}$

ora si disegna nel grafico quanto appena trovato: siccome con $z = 0$ è difficile disegnare la soluzione nel grafico, si pone $z = 1$: E CERCHIAMO UN'ALTRA SOLUZIONE PARTICOLARE DI Σ

per $z = 1$ ho: $(2, 1, 1) \Rightarrow$ Sol Σ È DATO DAI PUNTI DETERMINATI SOMMANDO I VETTORI $(2,1,1)$ e $(-a, 2a, 3a)$, AL VARIARE DI A

ottengo una retta, parallela a $\mathrm{Sol}\,\Sigma_0$, spostata da $\mathrm{Sol}\,\Sigma_0$ del vettore $(2, 1, 1)$, soluzione particolare del non omogeneo

gli spazi ottenuti spostando parallelamente a se stessi i SOTTOSPAZI VETTORIALI precedentemente trovati vanno definiti come segue:

Definizione: Si dice sottospazio AFFINE A di uno spazio vettoriale V l'insieme ottenuto spostando un sottospazio vettoriale W parallelamente a se stesso LUNGO un vettore v, DATO IN V

Definizione: Fissato un vettore $v_0 \in V$, si dice TRASLAZIONE di vettore v_0 l'applicazione t_{v_0}

$$V \to V$$
$$v \mapsto v + v_0$$

Allora ogni sottospazio affine A è il traslato di un sottospazio vettoriale W, cioè

$$A = v_0 + W$$

Osservazione: l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare <u>NON omogeneo</u> è un sottospazio affine e <u>viceversa</u>.

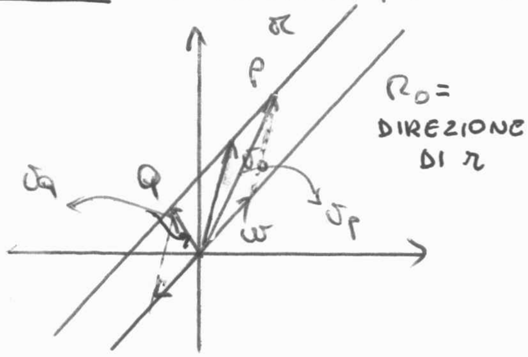
- l'unica cosa che si può estendere al sottospazio affine è il concetto di dimensione: DICIAMO CHE n è la <u>dimensione del sottospazio affine</u> se n è la dimensione del sottospazio vettoriale di partenza, DI CUI ESSO È IL TRASLATO

CIOÈ: se $A = v_0 + W \Rightarrow \dim A = \dim W$

- ogni <u>sottospazio vettoriale</u> è anche S.SPAZIO affine (ma non viceversa), considerando come vettore di traslazione il vettore <u>nullo</u>
- Dato un sottospazio affine $A = v_0 + W$, è unico il sottospazio vettoriale di cui esso (A) è il traslato

  (cioè W è UNICO)

- tale sottospazio vettoriale è detto DIREZIONE o <u>GIACITURA</u> <u>del sottospazio affine</u>.



P e Q giacciono nel sottospazio affine, mentre v_p e v_q sono i vettori che determinano quei punti, tuttavia non sono compresi nel sottospazio affine.

Esistono infiniti vettori v_a tali che che $A = v_a + W$

Infatti sia $a \in A$: esso individua un vettore v_a.

$$\Rightarrow A = v_a + W$$

VOGLIO DIMOSTRARE CHE: supponiamo $A = v_a + W$ e $b \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow$ dimostriamo che $A = v_b + W$

(AIUTO: $v_a + W \overset{?}{=} v_b + W \Rightarrow v_a + W \subseteq v_b + W$ e $v_b + W \subseteq v_a + W$.

ossia mi riduco a dimostrare che $\boxed{v_a+\tilde{w} \in v_b+W}$.

DIMOSTRAZIONE

UN ELEMENTO QUALUNQUE DI $A = v_a + W$ SARÀ DATO DALLA SOMMA DI v_a CON UN ELEMENTO $\tilde{w}$ DI W, QUINDI SARÀ $v_a + \tilde{w}$

$\Rightarrow$ FACCIAMO VEDERE CHE $v_a + \tilde{w} \in v_b + W$ CIOÈ $\exists$ UN VETTORE $\hat{w}$ DI W TALE CHE

$$v_a + \tilde{w} = v_b + \hat{w}$$

INFATTI $b \in A \Rightarrow \exists$ UN $\bar{w} \in W$ TALE CHE $v_b = v_a + \bar{w}$

$\Rightarrow -v_b + v_a \in W$, ESSENDO $v_a - v_b = \bar{w}$, $\Rightarrow$ IL VETTORE $\tilde{w} + \bar{w}$ È IN W ED È PROPRIO IL VETTORE $\hat{w}$ CHE CERCAVAMO

POICHÉ $\tilde{w} + \bar{w} = \tilde{w} + v_a - v_b$ E QUINDI SE PONIAMO

$$\tilde{w} + v_a - v_b = \hat{w} \Rightarrow v_a + \tilde{w} = v_b + \hat{w}$$

ALLO STESSO MODO SI DIMOSTRA CHE $v_b + W \subseteq v_a + W$.

c. v. d.