1 10/04/13

data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ F bilineare simmetrica $\to$ $u, v \in V$ sono F-coniugati o F-ortogonali se $F((v,u)) = F((u,v)) = 0$

DEFINIZIONE: 1) u e v sono detti <u>F-ORTONORMALI</u> se sono F-coniugati e $F((u,u)) = F((v,v)) = 1$

2) Una base $\mathcal{B}_V$ è detta F-ortogonale se i suoi vettori sono F-ortogonali a 2 a 2

3) Una base $\mathcal{B}_V$ è detta F-ortonormale se i suoi vettori sono F-ortonormali

DEFINIZIONE: data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ f bilineare simmetrica $\to$ un vettore $v \in V$ è detto <u>ISOTROPO</u> se $F((v,v)) = 0$

OSSERVAZIONE: IL VETTORE NULLO È SEMPRE ISOTROPO $\forall$ F!

PROPOSIZIONE: Se $F: V \times V \to \mathbb{R}$ è degenere $\to$ ha vettori isotropi (esistono vettori isotropi)

DIMOSTRAZIONE:

- Fissata $\mathcal{B}_V \to$ ho $[F]_{\mathcal{B}_V} \to \text{rg}[F]_{\mathcal{B}_V} < n$, con $n = \dim V$

$\downarrow$

$\exists$ una riga di $[F]_{\mathcal{B}_V}$ che è combinazione lineare delle altre

- Supponiamo sia la j-esima $\to R_j = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + \alpha_{j-1} R_{j-1} + \alpha_{j+1} R_{j+1} + \ldots + \alpha_n R_n$

$\to$ POSTO $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$

la riga R_i è data da $(F((v_i, v_1))\ F((v_i, v_2)) \ldots F((v_i, v_n)))$

- posto $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\} \to$ CONSIDERO IL K-ESIMO ELEMENTO DELLA J-ESIMA RIGA $\Rightarrow$ $F((v_j, v_k)) = \alpha_1 F((v_1, v_k)) + \alpha_2 F((v_2, v_k)) + \ldots + \alpha_n F((v_n, v_k))$ $\forall k = 1, \ldots, n$

- $F((v_j, v_k)) = F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n, v_k))$ $\to$ PORTANDO AL SECONDO MEMBRO E SFRUTTANDO LA BILINEARITÀ DI F AVREMO:

- $0 = F((\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_n v_n - v_j, v_k))$

QUESTO È VERIFICATO PER OGNI VETTORE v_k DELLA BASE $\mathcal{B}_V$, CIOÈ IL VETTORE w È ORTOGONALE AD OGNI VETTORE DELLA BASE, QUINDI il vettore $w = \sum_{l=1}^{n} \alpha_l v_l - v_j$ è ortogonale ad ogni vettore di V e quindi anche a sé stesso $\to$ è F-isotropo

c.v.d

2

• ESEMPIO:

Se $F: V\times V \to \mathbb{R}$ é non degenere, può avere vettori isotropi NON NULLI

$\to F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_2 + y_1x_2$$

· prendo in $\mathbb{R}^2$ la base canonica

$$[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i vettori di base sono isotropi

PROPOSIZIONE: Sia $F: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bil. simmetrica non nulla $\to \exists$ almeno un vettore non isotropo NON NULLO

DIMOSTRAZIONE:

• Siano $v, w \in V$ e supponiamo $F((v,w)) \neq 0$

$$F((v+w, v+w)) = F((v,v)) + F((v,w)) + F((w,v)) + F((w,w))$$
$$= F((v,v)) + F((w,w)) + 2F((v,w))$$

$$\to F((v,w)) = \frac{F((v+w,v+w)) - F((v,v)) - F((w,w))}{2} \neq 0$$

$\to$ si può fare perché la caratteristica é $\neq 2$

$\to$ almeno uno fra $v, w, v+w$ é non isotropo c.v.d

PROPOSIZIONE: Sia V sp. vett. con $\dim V = n$, $F: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bil. simmetrica priva di vettori isotropi $\neq \{0\}$. posto $\mathcal{U} \leq V$ con $\dim \mathcal{U} = k < n$

$$\Rightarrow \mathcal{U}^{\perp} = \{v \in V / F((v,u)) = 0 \ \forall u \in \mathcal{U}\} \text{ é un}$$

sottospazio di V $(n-k)$ dimensionale e quindi $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^{\perp} = V$ (ESSENDO $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$)

③ DIMOSTRAZIONE:

Sia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{u_1, u_2, \dots, u_K\}$ → i vettori di $\mathcal{U}^\perp$ sono F-ortogonali ad ogni $u \in \mathcal{U}$ cioè

$F((v,u)) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \Rightarrow F((v, a_1u_1 + \dots + a_Ku_K)) = 0$

$\forall (a_1, \dots, a_K) \in \mathbb{R}^K \Rightarrow$ anche per $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), (0,\dots,0,1) \Rightarrow F((v,u_1)) = 0, F((v,u_2)) = 0, \dots,$

$F((v,u_K)) = 0 \Rightarrow$ quindi basta ricercare i vettori $v \in V$ che siano F-ortogonali ai vettori della base

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \Rightarrow \begin{cases} F((v,u_1)) = 0 \\ F((v,u_2)) = 0 \\ \vdots \\ F((v,u_K)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F((\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, u_1)) = 0 \\ \vdots \\ F((\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, u_K)) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 F((v_1,u_1)) + \dots + x_n F((v_n,u_1)) = 0 \\ \vdots \\ x_1 F((v_1,u_K)) + \dots + x_n F((v_n,u_K)) = 0 \end{cases}$$

- Il rango del sistema scritto è massimo, perché le K equazioni sono linearmente indipendenti (FARE PER ESERCIZIO)
- Lo spazio delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di dimensione $n-K \Rightarrow \dim \mathcal{U}^\perp = n-K$
- Inoltre $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$ perché non esistono vettori isotropi (non banali) $\Rightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = V$

- $\mathcal{U}^\perp$ è detto <u>complemento ortogonale</u> di $\mathcal{U}$ e quanto visto ci dice che se $\nexists$ vettori isotropi non nulli $\Rightarrow \forall v \in V, v = u + w$ tali che $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow$ u è allora detto <u>proiezione ortogonale</u> di v su $\mathcal{U}$ e w è allora detto <u>proiezione ortogonale di v su $\mathcal{U}^\perp$</u>

PROPOSIZIONE: Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ f. bil. simmetrica $\to$ $\exists$ sempre una base di V, F-ortogonale

DIMOSTRAZIONE (PER INDUZIONE) su $n = \dim V$

1) per $n = 1 \to$ VERO

2) Supponiamolo vero per $n \leq K$ e lo dimostriamo per $n = K+1$

- Sia $v \in V$, non isotropo $\to$ $v^{\perp} = \{ w \in V / F((w,v)) = 0 \} \to$

$\to$ $v^{\perp}$ è un sottospazio K-dimensionale in uno spazio V, K+1-dimensionale (cioè un iperpiano)

$\to$ $\dim v^{\perp} = K$ $\to$ per ipotesi induttiva posso determinare una base di $v^{\perp}$ formata da vettori F-ortogonali $(\mathcal{B}_{v^{\perp}})_{\perp}$

$(\mathcal{B}_{v^{\perp}})_{\perp} = \{ w_1, \dots, w_K \}$ $\to$ la base cercata di V sarà $(\mathcal{B}_V)_{\perp} = \{ w_1, \dots, w_K, v \}$

ESERCIZIO

- Dimostrare che data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ bil. sim. e v, w vettori $\in V$ tali che $v \neq w$, $F((v,w)) = 0$ $\to$ v, w sono lin. indipendenti

ESERCIZIO

- Descrivere la matrice associata ad una $F: V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare simm. in una base F-ortogonale, e F-ortonormale?

ESERCIZIO

- Data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ f. bil. sim. $\to$ $\exists$ sempre una base F-ortonormale di V?