Fissati B_1 e B_2 in V $\Rightarrow$ data $V \times V \to \mathbb{R}$: F Forma bilineare

Dette A e B matrici associate ad F nelle basi B_1 e B_2.

$$\Downarrow$$

$A \sim_c B$, ovvero $B = S^T \cdot A \cdot S$

(A CONGRUENTE a B)

Consideriamo i determinanti delle matrici congruenti:

$$B = S^T \cdot A \cdot S \overset{(1)}{\Rightarrow} |B| = |S^T| \cdot |A| \cdot |S|$$

$$\Downarrow (2)$$

$$|B| = |S|^2 \cdot |A|$$

$$\Downarrow$$

I det. di due matrici congruenti differiscono per un $n > 0$ ($n \in \mathbb{R}$)

(1) Per Binet
(2) $|S^T| = |S|$

Consideriamo i ranghi

$$\left[\begin{array}{l} \Rightarrow |B| = |S|^2 \cdot |A| \\ \text{Se } rgA \text{ é max} \\ \Rightarrow \text{poiché } |S|^2 > 0 \\ \text{anche } rgB \text{ é max} \end{array} \right]$$

LEMMA

Siano A ed $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|S| \neq 0$

$\Rightarrow rg(A \cdot S) = rgA$

Dimostro

Considero le colonne di $A \cdot S$ possono essere pensate come $A \cdot C_S^J$ (dove C_S^J $(J = 1, \dots, n)$ sono le colonne di S).

$\Rightarrow$ Ogni AC_S^J é combinazione lineare delle colonne di A

$$\left(\text{Es} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} \end{pmatrix} = b_{11} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + b_{21} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$rg(A \cdot S) \leq rg A$$

Ora considero $(A \cdot S) \cdot S^{-1}$

$\Rightarrow$ Ripetendo il ragionamento precedente

$$rg \underbrace{(A \cdot S) \cdot S^{-1}}_{\substack{\parallel \\ A}} \leq rg(A \cdot S)$$

$$\Rightarrow \quad rg A \leq rg(A \cdot S) \leq rg A$$

$$\Rightarrow \boxed{rg A = rg(A \cdot S)} \quad QED$$

Analogamente si ha $rg(SA) = rg A$

con $|S| \neq 0$

Torniamo a $A \sim_c B$ e consideriamo i loro ranghi.

$$B = S^T \cdot A \cdot S$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\text{Due matrici congruenti hanno lo stesso rango}} \Leftarrow$

$\underline{rg B} = rg(S^T \cdot A \cdot S) = rg[(S^T \cdot A) \cdot S] =$ Per il lemma su dimostrato

$= rg(S^T \cdot A) =$

$= \underline{rg A}$

Se $rg\, A = rg\, B$ non é sempre vero che

$A \sim_c B$.

CONTROESEMPIO...

DEFINIZIONE

1) Si dice RANGO di una forma bilineare, il rango di una qualunque matrice ad essa associata.

2) Una forma bilineare é detta DEGENERE se il suo rango non é massimo.

3) Una forma bilineare é SIMMETRICA se data $F: V \times V \to \mathbb{R}$, $F((v,w)) = F((w,v))$ $\forall\, v, w \in V$

$\Downarrow$

Fissata $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow [F]_{B_V} = (a_{ij}) = \Big(F((v_i, v_j))\Big)$

$\Downarrow$

Se F é simmetrica

$$\left.\begin{array}{l} F((v_i, v_j)) = F((v_j, v_i)) \\ \Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \end{array}\right\} \forall\, i, j = 1, \dots, n$$

E QUINDI $[F]_{B_V}$ E' SIMMETRICA

4) Una forma bilineare $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é ANTISIMMETRICA se $F((v, w)) = -F((w, v))$ $\boxed{\forall\, v, w \in V}$

$\Downarrow$

Fissata $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow [F]_{B_V} + [F]_{B_V}^T = 0$ CIOE' $[F]_{B_V}$ E' ANTISIMMETRICA

5) Una forma bilineare $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é detta ALTERNANTE se $F((v, v)) = 0$

$\Downarrow$

Se lavoriamo in $\mathbb{R}$ se F é ALTERNANTE é anche ANTISIMMETRICA E VICEVERSA

③

Definizione

Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, forma bilineare simmetrica.

$\Rightarrow$ Due vettori v e $w \in V$ si dicono F-coniugati o F-ortogonali

se $F((v,w)) = F((w,v)) = 0$

è necessaria la simmetria proprio per quest'uguaglianza

Osservazione

Se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono F-coniugati ad un $w \in V \Rightarrow$ ogni combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ è ancora F-coniugato di w.

Dimostra

$$F((\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n), w)) = \alpha_1 F(v_1, w) + \dots + \alpha_n F(v_n, w) =$$
$$= 0 + \dots + 0 = 0$$

$\Downarrow$

$$\left[\underbrace{\langle\langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle}_{\text{Spazio vettoriale}} \text{ è } F\text{-ortogonale a } w \right]$$

$\Downarrow$

Eservizio

Quali sono i vettori di V (se $\exists$) F-coniugati al vettore nullo?

$\Downarrow$

Tutti i vettori di V

$$F((v, 0)) = 0 \quad \forall\, v \in V$$

$\Downarrow$

Indicheremo $w^\perp = \{ v \in V \,/\, F((v,w)) = 0 \}$

$\Rightarrow w^\perp$ è sottospazio vettoriale di V

INFATTI $0 \in w^\perp$

$$\underset{w^\perp}{\underset{\cap}{\alpha v_1}} + \underset{w^\perp}{\underset{\cap}{\beta v_2}} \in w^\perp$$

Sia $W \leqslant V$, pongo $W^{\perp} = \{ v \in V \,/\, F((v, w)) = 0 \; (\forall\, w \in W) \}$

ESERCIZIO: $W^{\perp} \leqslant V$

$$0 \in W^{\perp}$$

$$\underset{\substack{\cap \\ W^{\perp}}}{\alpha V_1} + \underset{\substack{\cap \\ W^{\perp}}}{\beta V_2} \in W^{\perp}$$

EXEMPLUM

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \underbrace{x_1 y_2 + x_2 y_1}_{\text{Polinomio di } 2^\circ \text{ grado omogeneo}}$$

F é bilineare

F é simmetrica? Sí!

$$F((x, y)) = x_1 y_2 + x_2 y_1$$

$$\Rightarrow F((y, x)) = y_1 x_2 + y_2 x_1$$

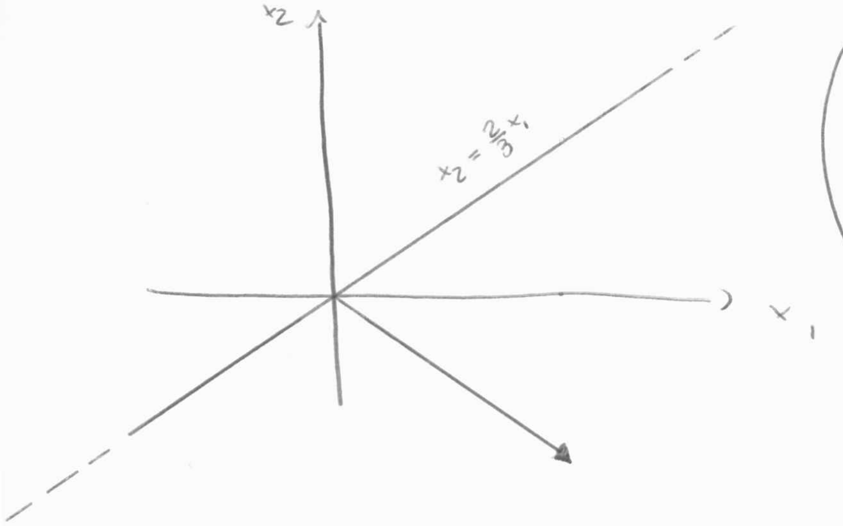
$F((x, y)) = F((y, x))$

$\exists$ F-coniugati a $(3, -2) = v$

$$F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right) = 3x_2 - 2x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} x_2$$

⇓

Disegnamolo



Non sempre l'ortogonalità $\equiv$ con la perpendicolarità

Definizione

Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

- si dice DEFINITA POSITIVA se $F((v,v)) > 0 \quad \forall\ v \neq 0$
- " " POSITIVA " $F((v,v)) \geq 0 \quad \forall\ v \in V$
- " " NEGATIVA " $F((v,v)) \leq 0 \quad \forall\ v \in V$
- " " DEFINITA NEGATIVA " $F((v,v)) < 0 \quad \forall\ v \neq 0$
- " " INDEFINITA altrimenti

⇓

Toriamo all'EXEMPLUM precedente e consideriamo:

$$F\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1x_2 + x_1x_2 = 2x_1x_2 = 0 \text{ anche per } v \neq 0$$

⇓

INDEFINITA

se x_1 e x_2 concordi $2x_1x_2 > 0$

" x_1 e x_2 discordi $2x_1x_2 < 0$