(6/05/2013

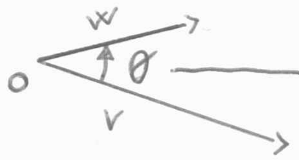
Sia $\mathbb{R}^n$ spazio euclideo; sia $v \circ w$ prodotto scalare tra v e $w \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ PER LA DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ SI HA $\Rightarrow$ $|v \circ w| \leq \|v\| \circ \|w\|$

$$\Rightarrow -\|v\| \circ \|w\| \leq v \circ w \leq \|v\| \circ \|w\|$$

Se per Hp v e $w \neq \{0\}$

$$\Downarrow$$

$$-1 \leq \frac{v \circ w}{\|v\| \circ \|w\|} \leq 1$$



$\longrightarrow$ Angolo convesso (tra i
Angolo + piccolo) due vettori

$$\Downarrow$$

Definizione

$$\cos\theta = \frac{v \circ w}{\|v\| \circ \|w\|} \Rightarrow v \circ w = \|v\| \circ \|w\| \circ \cos\theta$$

$$\Downarrow$$

Posso collegare la definizione di ortogonalità a quella di perpendicolarità

$$\Downarrow$$

$\underbrace{v \circ w}$ $= 0$ (Hp $v, w \neq \{0\}$) $\Leftrightarrow$ $v \perp w$

ortogonali rispetto al prodotto scalare

$$\begin{cases} \|v\| \circ \|w\| \cdot \cos\theta = 0 \\ \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Possiamo sempre determinare una base ORTONORMALE di $\mathbb{R}^n$ $(B^{*}_{\perp n})$, rispetto alla quale la matrice ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALARE $[\cdot]_{B_{\perp n}} = I$.

$\Downarrow$ $\Uparrow$ Per Sylvester

In tale base $B_{\perp n}$, posta

$$[v]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X$$

$$[w]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Y$$

$\Downarrow$

$$\underbrace{v \cdot w = X^T \cdot I \cdot Y = X^T \cdot Y = \sum_1^n x_i y_i}_{\text{"PRODOTTO SCALARE STANDARD"}}$$

Base ortonormale

$\Downarrow$

Vettori tra loro ortogonali e $\underbrace{\text{di norma unitaria}}$

possiamo, in genere, normalizzare un vettore $(\neq \{0\})$

$$\Rightarrow \hat{v} = \frac{v}{\|v\|}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\|\hat{V}\|} = \left\| \frac{V}{\|V\|} \right\| = \sqrt{\frac{V}{\|V\|} \cdot \frac{V}{\|V\|}} =$$

$$= \frac{1}{\|V\|} \cdot \sqrt{V \cdot V} = \frac{\|V\|}{\|V\|} = \underline{1}$$

Determiniamo una $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^3$

$$\Downarrow$$

PRENDO $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Considero $V_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Big/ V_1 \cdot V_2 = 0 = x + 2y + z = 0$

$x = -2y - z \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (SCELTO A PIACERE IN $x+2y+z=0$)

$\Rightarrow$ Necessito di $V_3 \Big/ \begin{cases} V_1 \cdot V_3 = 0 = x + 2y + z = 0 \\ V_2 \cdot V_3 = 0 = -2x + y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y = 2x \\ x + 4x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = -5x \end{cases} \Rightarrow V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ (AD ESEMPIO)}$$

$$\Rightarrow B_{\perp} = \underbrace{\{V_1, V_2, V_3\}}_{LI} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

> Se due vettori sono ortogonali → non isoTROPI!
> $\Downarrow$
> Essi sono LINEARM. INDIPEND.

Trovata $B_\perp$, normalizzo v_1, v_2 e v_3

$$\Downarrow$$

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{6}} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{v_2}{\sqrt{5}} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{v_3}{\sqrt{30}} = \begin{pmatrix} \sqrt{30}/30 \\ \sqrt{30}/15 \\ -\sqrt{30}/6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{\perp n} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$$

Dato un sottospazio $\mathcal{U} \leq \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \exists!\ \mathcal{U}^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{U} \}$$

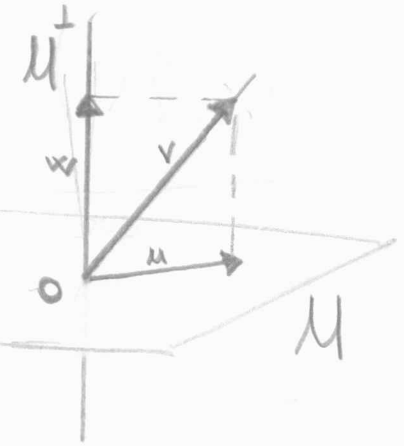
tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp = \mathbb{R}^n$

$\mathcal{U}^\perp$ È DETTO COMPLEMENTO ORTOGONALE DI $\mathcal{U}$.

Quindi ogni $v \in \mathbb{R}^n$ può essere scritto in modo unico come somma $v = u + w$ con $u \in \mathcal{U}$ e $w \in \mathcal{U}^\perp$.

EXEMPIUM

u è PROIEZIONE ORTOGONALE di v su $\mathcal{U}$



w è PROIEZIONE ORTOGONALE di v su $\mathcal{U}^\perp$

Dato $v \in \mathbb{R}^n$ e $U < \mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

Proiezione ortogonale di v su U?

Dove $B_U = \{u_1, ..., u_k\}$ $[\dim U = k]$

$\Downarrow$

Cerco $u = x_1 u_1 + ... + x_k u_k$

So che $v = u + w$, $w \in U^\perp$

$\Downarrow$

$w = v - u$ e $w \perp u_j \ \forall j = 1, ..., k$

$\Rightarrow w = v - (x_1 u_1 + ... + x_k u_k) = v - x_1 u_1 - ... - x_k u_k$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v - x_1 u_1 - ... - x_k u_k) \cdot u_1 = 0 \\ \vdots \\ (v - x_1 u_1 - ... - x_k u_k) \cdot u_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 u_1 \cdot u_1 + ... + x_k u_k \cdot u_1 = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ x_1 u_1 \cdot u_k + ... + x_k u_k \cdot u_k = v \cdot u_k \end{cases}$$

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cccc|c} u_1 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_1 & \cdots & u_k \cdot u_1 & v \cdot u_1 \\ u_1 \cdot u_2 & \cdots & \cdots & u_k \cdot u_2 & \vdots \\ \vdots & & & & \\ u_1 \cdot u_k & \cdots & \cdots & u_k \cdot u_k & v \cdot u_k \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$\det A \neq 0$ poiché A é matrice associata al prodotto scalare in $\mathcal{U}$

$\Downarrow$

A é definita positiva

$\Rightarrow$ Per Jacoby i minori di N-W sono > 0 (ESSENDO IL PRIMO > 0)

$\Downarrow$

$\boxed{\det A > 0}$

$\Downarrow$

$rg A = rg(A \,\vdots\, B)$

$A \cdot X = B$ ha soluzione sempre

$\Downarrow$

Sol é unica (ho sistema di Cramer)

$\Downarrow$

$$\underbrace{\text{Sol} = (x_1, x_2, \dots, x_k)}_{\text{fornisce le coordinate di } u \text{ nella base } B_u}$$

Se $B_u = B_{u\perp}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 u_1 \circ u_1 = V \circ u_1 \\ \vdots \\ x_k u_k \circ u_k = V \circ u_k \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} u_1 u_1 & \cdots & 0 & u_1 \circ V \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & u_k u_k & u_k \circ V \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{V \circ u_1}{\| u_1 \|^2} \\ \vdots \\ x_k = \dfrac{V \circ u_k}{\| u_k \|^2} \end{cases}$$

Coefficienti di fourier

$\Downarrow$

Solo nell'Hp che la Base DEL SOTTOSPAZIO sia ortogonale!

Se poi la base è ortonormale

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_1 = V \circ u_1 = \|V\| \circ \|u_1\| \cdot \cos\theta_1 = \|V\| \circ \cos\theta_1 \\ \vdots \\ x_k = V \circ u_k = \|V\| \circ \|u_k\| \circ \cos\theta_k = \|V\| \cdot \cos\theta_k \end{cases}$$

$$\boxed{x_i = \|V\| \circ \cos\theta_i \qquad i = 1, \dots, k}$$

TEOREMA DI ORTOGONALIZZAZIONE

(DI GRAM-SCHMIDT)

Dati k vettori Lindip. in $\mathbb{R}^n$, $(V_1, \dots, V_k)$

$\Downarrow$

$\exists$ k vettori $\underbrace{(w_1, \dots, w_k)}_{\text{UNICA A MENO DI UN FATTORE MOLTIPLICATIVO}} \in \mathbb{R}^n$

tali che • essi siano ortogonali a due a due;

• $\langle\langle V_1, \dots, V_J \rangle\rangle = \langle\langle w_1, \dots, w_J \rangle\rangle$

$\forall J = 1, \dots, k$