Come variano i determinanti di due matrici simili?

Se $A \simeq B \Rightarrow \exists\, S \in M_{n\times n}$ invertibile tale che $B = S^{-1}AS \Rightarrow |B| = |S^{-1}A \cdot S| = |S^{-1}||A||S| =$

$= |S|^{-1}|A| \cdot |S| = |A| \cdot \underbrace{|S^{-1}| \cdot |S|}_{1} = |A| \Rightarrow \left[\text{Se } A \simeq B \Rightarrow |A| = |B|\right]$

{IL VICEVERSA, se $|A| = |B| \Rightarrow A \simeq B$ NON È VERO *}

* CONTROESEMPIO $\quad I = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = A \quad$ e $\quad B = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$|A| = |B| = 1 \Rightarrow$ cerco $S \in M_{2\times 2}$ invertibile tale che $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

$\Rightarrow B = S^{-1}AS = (S^{-1} I) S = S^{-1} \cdot S = I$ è FALSO $B \neq I$

$\hookrightarrow \nexists\, S \in M_{2\times 2}$ richiesta.

VEDIAMO CHE PER LA RELAZIONE DI SIMILITUDINE TRA MATRICI, VALE LA:

RIFLESSIVITÀ

$A \simeq A$; se prendo $S = I \Rightarrow A = I \cdot A \cdot I = A$, È RIFLESSIVA

SIMMETRIA

se $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

$\Downarrow$

$\exists\, S \,/\, B = S^{-1}AS \Rightarrow \exists\, T \,/\, A = T^{-1}BT$

$B = S^{-1}AS \Rightarrow SB = SS^{-1}AS \Rightarrow SBS^{-1} = \underbrace{SS^{-1}}_{I} A \underbrace{SS^{-1}}_{I} = A$

$T = S^{-1}$; È SIMMETRICA

TRANSITIVITÀ

se $A \simeq B \wedge B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

$B = S^{-1}AS$
$C = T^{-1}BT$ $\qquad \exists\, P \in M_{n\times n}$ invert $/\, C = P^{-1}AP$

$C = \underbrace{(T^{-1}S^{-1})}_{P^{-1}} A \underbrace{(ST)}_{P = ST} = P^{-1}AP \qquad \exists\, P \Rightarrow$ è TRANSITIVA

$\hookrightarrow P^{-1} = (ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

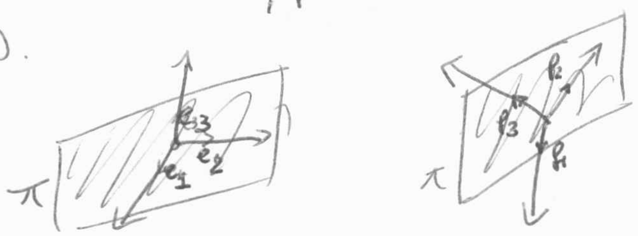
⇒ LA SIMILITUDINE È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA

posso creare classi di equivalenza di matrici simili alle quali è associata un (APPLICAZIONE) / OPERATORE LINEARE [A cui vengono cambiate le basi DEGLI SPAZI VETTORIALI]
INOLTRE:
ad gni classe è associato un numero, perchè $\underbrace{\text{hanno}}_{\text{MATRICI SIMILI}}$ le stesso determinante.

Il rango di matrici simili è UN INVARIANTE DELLA CLASSE DI EQUIVALENZA:
- se $\det \neq 0$ rango massimo
- se $\det = 0$ ⇒ BASTA RICORDARE CHE IL RANGO DELLA MATRICE È LA DIMENSIONE DELLO SPAZIO IMMAGINE DELL'APPLICAZIONE ASSOCIATA:

L'APPLICAZIONE MANDA ELEMENTI IN UNO SPAZIO IMMAGINE, il quale non cambia le sue dimensioni, pur cambiando le basi DEGLI SPAZI VETTORIALI

es.



$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con $\operatorname{Im} T = \pi$ (PIANO)

π non cambia le sue dimensioni al cambiare di base, solo la sua equazione.
$\dim(\operatorname{img} \varphi) = rg(\text{matrice})$

MATRICI SIMILI HANNO QUINDI lo STESSO RANGO.

DEFINIZIONE

matrici simili e matrici (DIAGONALI) sono dette DIAGONALIZZABILI

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e considero $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ posso determinare la matrice quadrata $A-\lambda I \in M_{n\times n}$

Es.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \Rightarrow A-\lambda I = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2\\3&4-\lambda\end{pmatrix} \Rightarrow$ cerco il determinante di $A-\lambda I$

sarà un polinomio in λ di grado = all'ordine della matrice

detto **POLINOMIO CARATTERISTICO** DELLA MATRICE A

$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\3&4-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(4-\lambda)-6=\lambda^2-5\lambda-2$

posto $=0$ si ricercano le radici CARATTERISTICHE

$\lambda^2-5\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{5\pm\sqrt{25+8}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{33}}{2}$

NOTA:

Il polinomio caratteristico è anche detto come $\det(\lambda I-A)=\det(-(A-\lambda I))$
$=(-1)^n|A-\lambda I|$

HANNO LE STESSE RADICI CARATTERISTICHE.
$|\lambda I-A|$ È UN POLINOMIO MONICO, CIOÈ IL COEFFICIENTE DI λ^n È $+1$ $\forall n$.

Sia $T:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ l'operatore associato ad $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ in base $\mathcal{E}$, BASE CANONICA.

$\Rightarrow$ Associato alla matrice quadrata $A-\lambda I$ abbiamo l'operatore dato dalla differenza tra T e l'operatore associato a λI ossia $\lambda\, id$. $\begin{aligned}\mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}^n\\ v&\mapsto\lambda v\end{aligned}$

$T-\lambda\, id$ $\begin{cases}\text{SE SOSTITUIAMO AL PARAMETRO } \lambda \text{ le radici caratteristiche } \lambda_j\text{: } rg(A-\lambda_j I) \text{ NON È MASSIMO} \Rightarrow\\ \Rightarrow Ker(T-\lambda id)\neq 0\end{cases}$

Cerco $Ker(T-\lambda id)$ cioè cerco $\{v\in\mathbb{R}^n \,/\, (T-\lambda id)(v)=0\} \Rightarrow Ker(T-\lambda id)=Sol(A-\lambda I)X=0$

$\Rightarrow$ perché esistano soluzioni $\neq 0$ il $rg(A-\lambda I)$ non deve essere massimo, cioè $\det(A-\lambda I)=0$

le radici caratteristiche λ_j sono dunque QUEI NUMERI REALI CHE (SOSTITUITI AL PARAMETRO λ) rendono l'applicazione $T-\lambda id$ non iniettiva $\Rightarrow \exists\, v \neq 0 \in Ker(T-\lambda_j id)$ cioè $\exists\, v \neq 0 / (T-\lambda_j id)(v) = 0$ cioè $\exists\, v \neq 0 /$ $(Tv - \lambda_j v = 0)$

$T(v) = \lambda_j v$ CIOE' l'applicazione manda il vettore v in un suo multiplo.

DEFINIZIONE

SE ESISTONO SOTTOSPAZI VETTORIALI CHE VENGONO MANDATI IN SE STESSI DALL'APPLICAZIONE, ESSI SONO detti SOTTOSPAZI INVARIANTI (per l'operatore studiato)

definizioni:

- i numeri reali: λ_j, [t.c. $T(v) = \lambda_j v$ per almeno un $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$] sono detti AUTOVALORI DELL'OPERATORE
- i vettori $v \neq 0$ per i quali [$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.] $T(v) = \lambda v$ sono detti AUTOVETTORI di T RELATIVI ALL'AUTOVALORE λ

se v è autovettore relativo all'autovalore $\lambda \Rightarrow$ ogni suo multiplo lo è ancora

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \lambda_j v = \lambda_j (\alpha v)$$

- L'insieme degli autovettori relativi allo stesso autovalore λ (unito il vettore nullo) forma un sottospazio vettoriale del dominio di T, detto AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE λ e indicato con E_λ

Infatti
- $v = 0 \in$ Insieme
- dati due vettori dentro lo spazio $\begin{cases} v_1, v_2 \in \text{Spazio } E_\lambda \\ \alpha v_1 \in \text{Spazio } E_\lambda \end{cases} \Rightarrow \alpha v_1 + \beta v_2 \in \text{Spazio}$

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ è ancora AUTOVETTORE RELATIVO A λ:

- INFATTI: $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 = \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$

PER LA LINEARITA' DI T

q.e.d