PROPOSIZIONE

Siano $L_1 : V \longrightarrow W$ ed $L_2 : W \longrightarrow U$,

applicazioni lineari; siano $\dim V = n$, $\dim W = K$,

$\dim U = p$;

supponiamo esistere $\underbrace{L_2 \circ L_1 : V \longrightarrow U}$

è lineare! (DA DIMOSTRARE) PER ESERCIZIO

Fissate le basi B_V, B_W, B_U nei rispettivi spazi $\Rightarrow$ possiamo considerare le matrici ASSOCIATE ALLE RISPETTIVE APPLICAZIONI LINEARI

$$[L_1]_{B_V}^{B_W}, \quad [L_2]_{B_W}^{B_U}, \quad [L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U}.$$

Th

$$\underbrace{[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U}}_{\substack{\cap \\ \mathcal{M}_{p \times n}}} = \underbrace{[L_2]_{B_W}^{B_U}}_{\substack{\cap \\ \mathcal{M}_{p \times K}}} \cdot \underbrace{[L_1]_{B_V}^{B_W}}_{\substack{\cap \\ \mathcal{M}_{K \times n}}} \Rightarrow$$

Ciò che ho scritto potrebbe essere vero

segue

Dimostrazione

Sia $v \in V$ e $[v]_{B_V}$, il suo vettore delle coordinate.

$\Downarrow$

$$\left[(L_2 \circ L_1)(v)\right]_{B_U} = \left[L_2 \circ L_1\right]_{B_V}^{B_U} \cdot [v]_{B_V}$$

$$\left[L_2(L_1(v))\right]_{B_U} = \left[L_2\right]_{B_W}^{B_U} \cdot \left[L_1(v)\right]_{B_W} =$$

$$= \left[L_2\right]_{B_W}^{B_U} \cdot \left[L_1\right]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V}$$

ció che ho scritto é vero, per ogni $v \in V$

$\Rightarrow$ PER l'arbitrarietá di v é vera $\forall v \in V$

$\Downarrow$

le due matrici nelle "bolle" coincidono:

$$\left[L_2 \circ L_1\right]_{B_V}^{B_U} = \left[L_2\right]_{B_W}^{B_U} \cdot \left[L_1\right]_{B_V}^{B_W}$$

Q.E.D.

COROLLARIO

Data $L : (V, B_1) \longrightarrow (V, B_2)$, invertibile e

$L^{-1} : (V, B_2) \longrightarrow (V, B_1)$, $\underbrace{\text{inversa di } L}$.

(Dimostrare che è lineare PER ESERCIZIO)

$\Downarrow$

$$[L^{-1}]_{B_2}^{B_1} = \left([L]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

Dimostrazione

Per definizione $L \circ L^{-1} = id_V = L^{-1} \circ L$

$\Downarrow$

$$[L \circ L^{-1}]_{B_2}^{B_2} = [L]_{B_1}^{B_2} \cdot [L^{-1}]_{B_2}^{B_1} = \underbrace{[id_V]_{B_2}^{B_2}} = I$$

stessa base nel dominio e nel codominio

$\Downarrow$

$$[L^{-1}]_{B_2}^{B_1} = \left([L]_{B_1}^{B_2}\right)^{-1}$$

PROPOSIZIONE

Data: $L : V \longrightarrow W$, lineare; fissate B_V e B_W basi negli sp. vett. -

$\Downarrow$

ho $[L]^{B_W}_{B_V}$, matrice associata ad L -

- Cambio le basi:

B'_V su V

B'_W su W

$\Downarrow$

Cerco $[L]^{B'_W}_{B'_V}$, mettendo in evidenza il suo legame con $[L]^{B_W}_{B_V}$:

COSTRUIAMO IL SEGUENTE DIAGRAMMA:

$$
\begin{tikzcd}
(V, B_V) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "id_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (W, B_W) \arrow[d, "id_2"] \\
(V, B'_V) \arrow[r, "L"] & (W, B'_W)
\end{tikzcd}
$$

DIAGRAMMA COMMUTATIVO

E' COMMUTATIVO PERCHE' ABBIAMO L'UGUAGLIANZA DELLE FUNZIONI COMPOSTE:

$$L \circ id_1 = id_2 \circ L$$

Matematicamente ciò che faccio sono composizioni:

$\Downarrow$

Matrici dei cambiamenti di base

$$[L]^{B'_W}_{B'_V} = [id]^{B'_W}_{B_W} \cdot [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [id]^{B_V}_{B'_V}$$

PERCHÉ MATRICI ASSOCIATE ALLE APPLICAZIONI CHE COMPAIONO NEL DIAGRAMMA:

$$\Rightarrow L = id_2 \circ L \circ (id_1)^{-1}$$

$$[id]^{B_V}_{B'_V} = \left([id]^{B'_V}_{B_V}\right)^{-1}$$

Al posto di B'_V e B'_W, posso considerare le basi canoniche C_1 e C_2

$\Downarrow$

otteniamo $[L]^{C_2}_{C_1}$

$\Downarrow$

E QUESTA È L'UNICA MATRICE CHE POSSIAMO USARE PER TALE SCOPO

Così abbiamo l'applicazione nella sua espressione analitica o cartesiana CONSIDERANDO L'UGUAGLIANZA:

$$[L(v)]_{C_2} = [L]^{C_2}_{C_1} [v]_{C_1}$$

Esempio

$$L : (\mathbb{R}^2, B_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, B_2) \;..$$

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[L]^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$L((x,y)) = \;?$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^2, C) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "id"] & (\mathbb{R}^2, C) \\
(\mathbb{R}^2, B_1) \arrow[r, "L"] & (\mathbb{R}^2, B_2) \arrow[u, "id"]
\end{tikzcd}$$

$$[id]^{B_1}_{C} \qquad [id]^{C}_{B_2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$id\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{pmatrix}$$

$$id\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [L]^{C}_{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$L\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&2\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x+2y\\-x-2y\end{pmatrix}$$

PERCIÒ L'APPLICAZIONE L SARÀ:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ L: \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix}4x+2y\\-x-2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Sia $T: (V,B) \longrightarrow (V,B)$, operatore sullo spazio vettoriale V con Base B.

Sia $A = [T]_B$.

Cambio base: B_1 base di V; cerco $[T]_{B_1}$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} (V,B) \arrow[r, "T"] & (V,B) \arrow[d, "id"] \\ (V,B_1) \arrow[u, "id"] \arrow[r, "T"] & (V,B_1) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow [T]_{B_1} = [id]_B^{B_1} \cdot [T]_B \cdot \underbrace{[id]_{B_1}^{B}}_{= S}$

Una inversa dell'altra IN QUESTO CASO!

$\Rightarrow [id]_B^{B_1} = \left([id]_{B_1}^{B}\right)^{-1} = S^{-1}$

$\Rightarrow [T]_{B_1} = B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

DEFINIZIONE

Date due matrici QUADRATE A e B, diciamo che B è *simile* ad A, se

$\exists\ S \in M_n$ invertibile / $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$

ESERCIZIO

Dimostra che ~~…~~ in M_n la relazione di similitudine è di equivalenza

CIOÈ:

RIFLESSIVA $A \simeq A$

SIMMETRICA se $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

TRANSITIVA se $A \simeq B$ e $B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

NOTAZIONE:

SE A È SIMILE AD B SCRIVEREMO $A \simeq B$.