

Classificazione delle quadriche in $\mathbb{R}^n$, cioè dei luoghi degli zeri dell'equazione di 2^o grado: 3-6-2013

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^n b_k x_k + c = 0$$

dove $(x_1, \dots, x_n)$ sono le coordinate di $\mathbb{R}^n$ che possiamo supporre essere prese in una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$;

$$a_{ij}, b_k, c \in \mathbb{R} \quad \forall i, j, k = 1, \dots, n.$$

Analogamente si ha in forma matriciale, posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$:

$$X^T A X + B^T X + c = 0$$

Nella riduzione a forma canonica della data

l'equazione generale della quadrica, come prima cosa portiamo ridotta a forma canonica la parte quadratiche; otteniamo $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$, dove λ_j sono gli autovalori di A .

Applichiamo le trasformazioni su coordinate a tutta l'equazione, ottenendo:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2 + \sum_{j=1}^n \mu_j y_j + d = 0$$

Ogni volta che compaia un y_j^2 nella parte quadratiche e un y_j nella parte lineare, possiamo ridurre ulteriormente l'equazione con la riduzione a quadranti di Gauss:

$$\lambda_j y_j^2 + \mu_j y_j = \lambda_j \left(y_j^2 + \frac{\mu_j}{\lambda_j} y_j \right) = \lambda_j \left(y_j + \frac{\mu_j}{2\lambda_j} \right)^2 - \frac{\mu_j^2}{4\lambda_j} = \lambda_j z_j^2 - \frac{\mu_j^2}{4\lambda_j}$$

Attenzione allora:

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j z_j^2 + \alpha z_{k+1} + \beta = 0$$

La classificazione delle quadriche parte dalla riduzione a forma canonica della parte quadratiche, che è data dal suo indice di inerzia:

1) esaminiamo il rango di A : - se è massimo $\Rightarrow$ la quadrica è non degenera e

la sua equazione diventa: $\sum_{j=1}^n \lambda_j z_j^2 = \beta$

si hanno 2 casi: $\boxed{\beta = 0}$

$\boxed{\beta > 0}$

* Se $\beta > 0 \Rightarrow$ posso scrivere $\frac{z_1^2}{\frac{\beta}{\lambda_1}} + \frac{z_2^2}{\frac{\beta}{\lambda_2}} + \dots + \frac{z_n^2}{\frac{\beta}{\lambda_n}} = 1$

Ma ogni elemento non sarà positivo.

Però: POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{z_1^2}{\frac{\beta}{\lambda_1}} + \dots + \frac{z_\ell^2}{\frac{\beta}{\lambda_\ell}} - \frac{z_{\ell+1}^2}{\frac{\beta}{\lambda_{\ell+1}}} - \dots - \frac{z_n^2}{\frac{\beta}{\lambda_n}} = 1$$

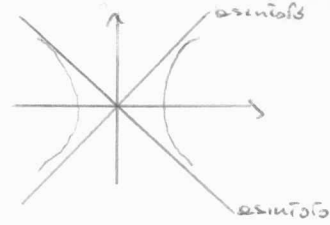
è a centro, perché F un centro di simmetria

Avremo tante quadriche quanto i possibili indici di inerzia della forma quadratiche, tranne il caso $(0, n)$.

1) Nel piano abbiamo $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$ $(1, 0)$ ELLISSE;

(1)

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} \quad (1,1) \quad \text{IPERBOLE:}$$



↳ nello spazio tridimensionale $\mathbb{R}^3$:

• $(3,0)$: $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1$ **ELLIPSOIDE**

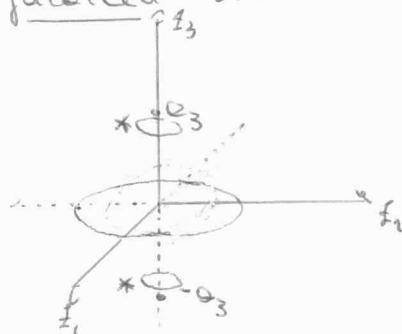
• $(2,1)$: $\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1$ **IPERBOLOIDE AD UNA FALDA**

• $(1,2)$: $\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1$ **IPERBOLOIDE A DUE FALDE**

• non abbiamo il caso $(0,3)$ perché in precedenza abbiamo supposto $\beta > 0$.

però ho 3 quadriche.

• Vediamo il caso $(3,0)$ facendo sezioni piane con i piani coordinati, e piane ad essi parallele. esempio si può individuare la superficie quadrica!



$$\begin{cases} z_3 = 0 \\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1$$

è un'ellisse
centrata nell'origine

$$\Rightarrow \begin{cases} z_3 = k \\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{k^2}{a_3^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1 - \frac{k^2}{a_3^2}$$

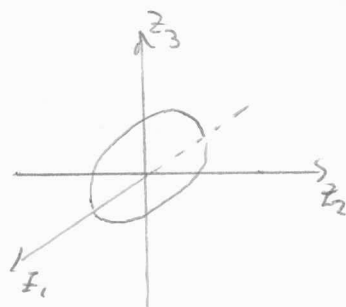
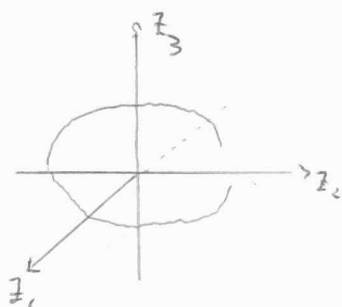
è un'ellisse per $1 - \frac{k^2}{a_3^2} > 0$

e $1 - \frac{k^2}{a_3^2} = 0$ se $k^2 = a_3^2$ (tangenza per i punti $\pm a_3$)

oppure $1 - \frac{k^2}{a_3^2} < 0$ se

$$\begin{cases} z_1 = 0 \\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1$$

ho ellissi più piccole
per intersezioni e
piani // ai piani
coordinati



$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \end{cases}$$

avendo tutti i casi in $\mathbb{R}^3$ ottengo un **ELLIPSOIDE** (in genere si fa vedere da tutti i lati).

(caratterizzabile da una **SFERA** chiusa)
il quale è limitato rispetto a iperboloidi e paraboloidi (i quali non sono caratterizzati).

* Se $\beta = 0 \Rightarrow$ la quadrica non degenera in un piano $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ CONI, che saranno:

POSSIAMO MOLTIPLICARE L'EQUAZIONE PER -1
ED OTTENIAMO LA STESSA QUADRICA $\Rightarrow$

$\bullet \frac{n}{2}$ se n è pari $\parallel$ in $\mathbb{R}^n$.
 $\bullet \frac{n-1}{2}$ se n è dispari

Se ci poniamo in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 2, 0 \\ \equiv \\ 0, 2 \end{pmatrix} \quad \frac{z_1^2}{f_1^2} + \frac{z_2^2}{f_2^2} = 0 \quad \text{un punto}$$

$$(1, 1) \quad \frac{z_1^2}{f_1^2} - \frac{z_2^2}{f_2^2} = 0 \quad \text{due rette che si intersecano}$$

$\Rightarrow$ in questo caso è "degenerata" in
due rette che si intersecano
(e in un caso a parte)

Se ci poniamo in $\mathbb{R}^3$:

$$(0, 3) \equiv (3, 0) \quad \frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 0 \quad \text{un punto}$$

$$(2, 1) \equiv (1, 2) \quad \frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 0 \quad \text{superficie conica (realizzata)}$$

Quando il rango di A non è massimo, si ottengono quadriche NON
DEGENERI SE NELLA LORO EQUAZIONE SONO PRESENTI TUTTE LE VARIABILI.

in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 0}$ PARABOLA $(1, 0)$ oppure $(0, 1)$

in $\mathbb{R}^3 \Rightarrow (2, 0) (1, 1) (0, 2)$

paraboloidi ellittici $\rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_3$

paraboloidi iperbolici $\rightarrow z_1^2 - z_2^2 = z_3$

Tutti per altro con degenerazioni IN RETTE in un piano

OPPURE ~~SE NELLA EQUAZIONE DELLA SUPERFICIE QUADRICA MANCANO DELLE VARIABILI~~, POSSIAMO

AVERE CILINDRI : $z_1^2 + z_2^2 = \beta$ (ellittico)

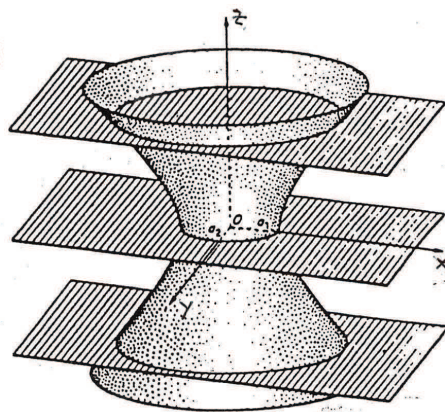
$$z_1^2 - z_2^2 = \beta \quad (\text{iperbolico})$$

$$z_1^2 = z_2 \quad (\text{parabolico})$$

OPPURE COPPIE DI PIANI.



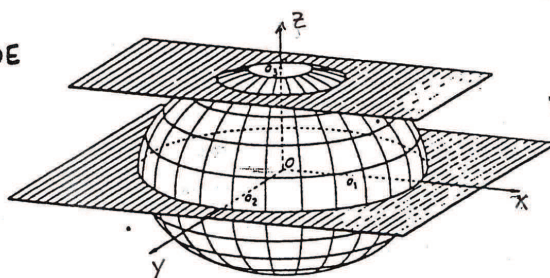
IPERBOLOIDE
A UNA
FALDA.



$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

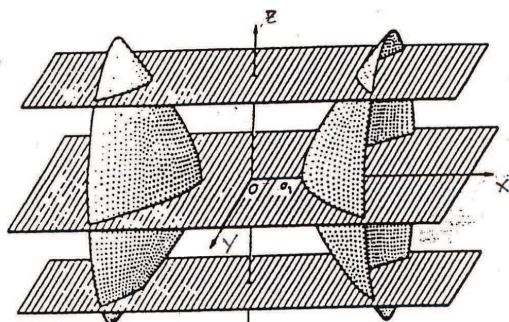
FIGURE 3

ELLISSOIDE



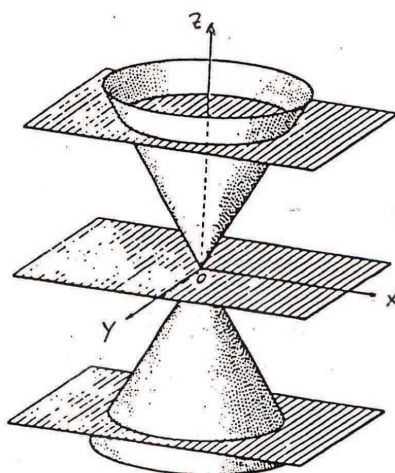
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

IPERBOLOIDE
A DUE FALDE.



$$x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

CONO



$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

Q
U
A
D
R
I
C
H
E

C
E
N
T
R
A
L
I

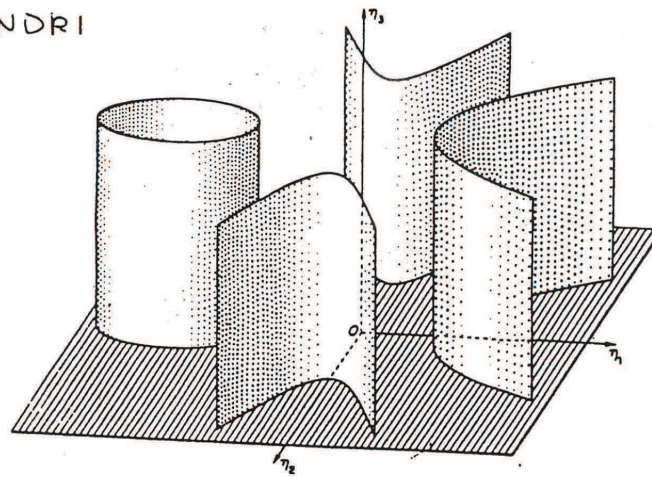
N
O
N

D
E
G
E
N
E
R
I

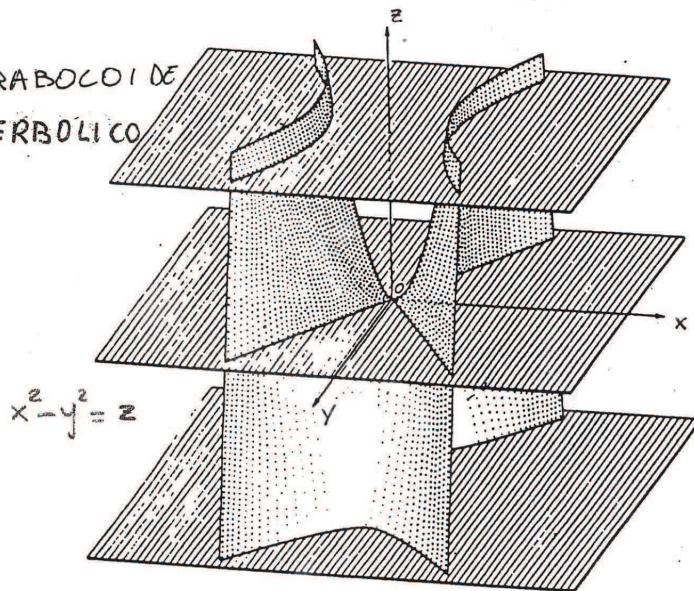
M
O
N

S
I
N
G
O
L
A
R
I

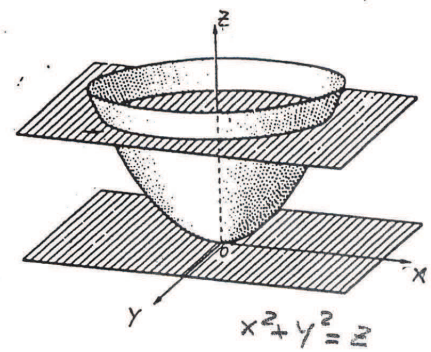
CILINDRI



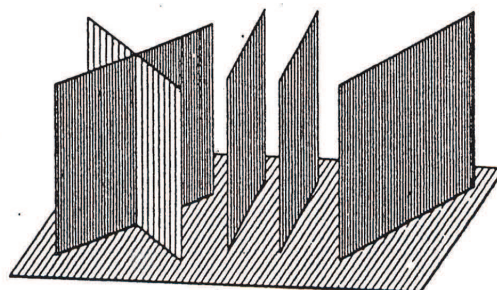
PARABOLOIDE PERBOLICO



QUADRICHE NON DEGENERI SINGOLARI



PARABOLOIDE ELLITTICO



COPPIE DI PIANI

Esercizio C ultimo foglio

$$2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 4xy - 4xz - 8yz + 7x = 0$$

questo quadratico.

1. Matrice:
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} = A$$

forma matriciale: $x^T A x + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0$

2. Autovalori:
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5-\lambda \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 16] - 2(10 - 2\lambda - 8) - 2(-8 + 10 - 2\lambda)$$

$$= (2-\lambda)(25 + \lambda^2 - 10\lambda - 16) + 4\lambda - 4 - 4 + 4\lambda$$

$$= 50 - 25\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 20\lambda + 10\lambda^2 - 32 + 16\lambda + 8\lambda - 8$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 8\lambda - 40 = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda + 40$$

$$= (2-\lambda)((5-\lambda)^2 - 16) - 2(-2\lambda + 2) - 2(-2\lambda + 2)$$

$$= (2-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 16] + (-2\lambda + 2)(-4)$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \quad \mu(1) = 2$$

$$\lambda = 10 \quad \mu(10) = 1$$

Autospazi: $\lambda = 1$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} x & y & z & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$f_1 = (2, 0, 1)$

trovare secondo ortogonale a f_1 : $\langle (2z - 2y, y, z), (2, 0, 1) \rangle = 0$

$$4z - 4y + z = 0$$

$$5z = 4y \rightarrow z = \frac{4}{5}y$$

$$f_2 = \left(2\frac{4}{5}y - 2y, y, \frac{4}{5}y \right) = \left(\frac{8-10}{5}y, y, \frac{4}{5}y \right) = \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5} \right)$$

Normalizzando: $\|f_1\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \rightarrow f_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

$$\|f_2\| = \sqrt{\frac{4}{25} + 1 + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$f_2 = \left(-\frac{2}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \text{ oppure } f_2 = (-2, 5, 4) \quad \|f_2\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$f_2 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{4\sqrt{5}}{15}\right) \text{ oppure } f_2 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$$

$$\lambda = 10: \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{z}{2} \\ y = -z \end{cases} \quad f_3 = \left(-\frac{1}{2}, -1, 1\right)$$

$$\|f_3\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \sqrt{\frac{1+4+4}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$f_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$B_{\perp} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$S^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 5/3\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$S \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \mu - \frac{2}{\sqrt{5}} \nu - \frac{1}{3} w \\ y = 0 \mu + \frac{5}{3\sqrt{5}} \nu - \frac{2}{3} w \\ z = \frac{1}{5} \mu + \frac{4}{3\sqrt{5}} \nu + \frac{2}{3} w \end{cases}$$

Riscrivere l'eq ne: $\mu^2 + \nu^2 + 10w^2 + 7\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\mu - \frac{2}{\sqrt{5}}\nu - \frac{1}{3}w\right) = 0$

$$\underbrace{\mu^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}\mu}_1 + \underbrace{\nu^2 - \frac{14}{\sqrt{5}}\nu}_2 + \underbrace{10\left(w^2 - \frac{7}{30}w\right)}_3 = 0$$

$$1) \left(\mu + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{49}{5}; \quad 2) \left(\nu - \frac{7}{3\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{49}{45}; \quad 3) 10\left(w - \frac{7}{60}\right)^2 - \frac{49}{360}$$

II Cambiamento variabile:

$$\begin{cases} t = u + \frac{7}{\sqrt{5}} \\ p = v - \frac{7}{3\sqrt{5}} \\ r = w - \frac{7}{60} \end{cases}$$

riscrivo eq. ne:

$$t^2 - \frac{49}{5} + p^2 - \frac{49}{45} + 10r^2 - \frac{49}{360} = 0$$

$$t^2 + p^2 + 10r^2 - \frac{3528 + 392 + 49}{360} = 0$$

$$t^2 + p^2 + 10r^2 - \frac{3969}{360} = 0$$

E' un ellissoide !