$$\Sigma = \begin{cases} R_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ R_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ R_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ R_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ R_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

SIA $\Sigma' =$

$$\begin{cases} R_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ R_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ sR_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + tR_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ R_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \\ R_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$s, t \in \mathbb{R} - \{0\}$

Sia $\underset{A}{(a_1, a_2, \dots, a_n)} \in Sol(\Sigma) \Rightarrow \Sigma(A) = \begin{cases} R_1(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_k(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \end{cases}$

Devo dimostrare che

$$\Sigma' \begin{cases} R_1(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ sR_i(a_1, \dots, a_n) + tR_j(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \leftarrow i\text{-esima eq di } \Sigma' \\ R_j(a_1, \dots, a_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_k(a_1, \dots, a_n) \equiv \end{cases}$$

verifichiamo che $(a_1, \dots, a_n)$ rende

$sR_i(x_1, \dots, x_n) + tR_j(x_1, \dots, x_n) \equiv 0$ sostituiamo $(a_1, \dots, a_n)$ sapendo che

$sR_i(a_1, \dots, a_n) + tR_j(a_1, \dots, a_n) = ?$

$R_i(a_1, \dots, a_n) \equiv 0$; $R_j(a_1, \dots, a_n) \equiv 0$

$s.0 + t.0 \equiv 0$

QUESTO DIMOSTRA CHE SE Σ' È OTTENUTO DA Σ MEDIANTE LA SOSTITUZIONE DI UNA EQUAZIONE CON LA SUA COMBINAZIONE LINEARE CON UNA SECONDA EQUAZIONE, LE SOLUZIONI SONO LE STESSE

Usiamo le matrici: tabelle di numeri ordinati per riga e per colonna

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$ (2 righe e 3 colonne)

Associamo a Σ una matrice: essa ha tante righe quante equazioni di Σ e tante colonne quante sono le variabili di Σ + la colonna dei termini noti.

ESEMPIO 1)

$$\Sigma \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ = matrice dei coefficienti o matrice INCOMPLETA

APPLICO IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS ALLE RIGHE DELLA MATRICE:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & : 1 \\ -1 & 2 & -1 & : 0 \\ 0 & 1 & 2 & : 2 \end{pmatrix} \overset{R_2 = R_1 + R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{R_3 = R_2 - 3R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{R_1 = 6R_1 + R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 & : 1 \\ 0 & 3 & 0 & : 1 \\ 0 & 0 & -6 & : -5 \end{pmatrix} \overset{R_1 = R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & : -1 \\ 0 & 3 & 0 & : 1 \\ 0 & 0 & -6 & : -5 \end{pmatrix} \sim$$

equivalente

$R_1 = R_1/6$
$R_2 = R_2/3$
$R_3 = R_3/-6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & : 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & : 5/6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/6 \\ x_2 = 1/3 \\ x_3 = 5/6 \end{cases}$$

Definizione: Due matrici reali $K \times M$ si dicono Equivalenti se sono (ASSOCIATE) a sistemi equivalenti cioè se sono ottenute l'una dall'altra mediante operazioni elementari righe

ESEMPIO 2)

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

$(1 \;\; 1 \;\; 1 ; 1)$ $\Rightarrow$ $x_1 = -x_2 + x_3 + 1$ HA RANGO 1

uno pivot

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{R_2 = R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 = 2R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 = R_1/2 \\ R_2 = R_2/2 \end{array} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1/2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2} x_3 = 1/2 \\ x_2 + 1/2\, x_3 = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1/2\, x_3 + 1/2 \\ x_2 = -1/2\, x_3 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

il Rango del sistema = # di variabile legate

x_3 È VARIABILE INDIPENDENTE O LIBERA POICHÉ PUÒ ASSUMERE QUALUNQUE VALORE REALE;

x_1 ; x_2 SONO VARIABILI DIPENDENTI O LEGATE

IL NUMERO DI VARIABILI LEGATE COINCIDE CON IL RANGO DEL SISTEMA.

IL NUMERO DI VARIABILI LIBERE DÀ IL GRADO DI LIBERTÀ DEL SISTEMA.