Sistemi lineari omogenei.

Se abbiamo 7 variabili libere su 10 variabili => Sol Σ_0 è un insieme di dimensione 7; ogni elemento di questo insieme è combinazione lineare delle 7 soluzioni fondamentali definite ponendo alternativamente uguale ad 1 il valore di una variabile libera ~~delle variabili~~ e 0 tutte le rimanenti.

Se $f_1, f_2, \dots, f_7$ sono le soluzioni fondamentali => Sol $\Sigma_0 =$
$$= \{a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_7 f_7 \mid a_j \in \mathbb{R} \ \forall j = 1, \dots, 7\}$$

esempio:

$$\Sigma_0 = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo con tre variabili e due equazioni; ne ricavo la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

il rango è uguale a 2; non sono ricavabili minori di ordine 3 POICHÉ LA MATRICE A HA 2 RIGHE

$rg\, A = rg\, \Sigma_0 = 2$ => 2 sono le variabili legate e $3-2=1$ variabile libera

ciò vuol dire che esiste un'unica soluzione fondamentale f_1 del sistema e la soluzione generale è un multiplo di f_1

fondamentale -> f_1

generale -> $a \cdot f_1$, $a \in \mathbb{R}$ =>

=> Sol $\Sigma_0 = \{a f_1 \mid a \in \mathbb{R}\}$ =>

GEOMETRICAMENTE: è stato determinato lo spazio delle soluzioni DEL SISTEMA ancor prima che esso venisse svolto.

risoluzione della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 \cdot \frac{1}{2} R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pertanto il sistema associato ALL'ULTIMA MATRICE è il seguente:

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3
-1	0	1
$-a$	0	a

Sol $\Sigma_0 = \{a(-1, 0, 1) \mid a \in \mathbb{R}\}$ lo spazio delle soluzioni

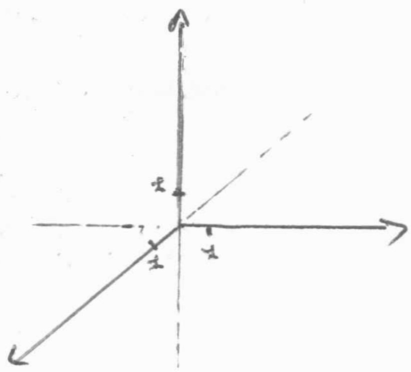
← SOLUZIONE FONDAMENTALE : $(-1, 0, 1) = (x_1, x_2, x_3)$

← SOLUZIONE GENERALE : $(-a, 0, a) = (x_1, x_2, x_3)$

Ora venga dato un significato geometrico allo spazio delle soluzioni appena individuato.

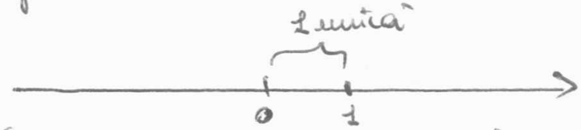
-> Siccome si sta lavorando in R con 3 variabili, lo spazio ambiente di questo insieme è $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^{(3)}$ → il numero dello spazio ambiente è dato dal numero delle variabili in gioco. Inoltre gli scalari sono reali.

$\mathbb{R}^3$ è individuato geometricamente così:



vengono disegnati gli assi del grafico cartesiano ciascuno perpendicolare alle altre

le rette vengono orientate e viene fissata l'unità di misura

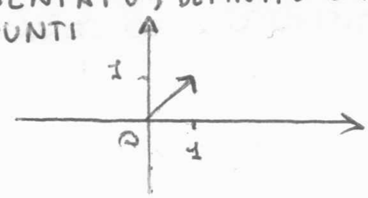


(l'orientamento delle rette viene dato dalla successione dei valori numerici)

la corrispondenza fra numeri reali e PUNTI DELLA RETTA RIGUARDA esclusivamente le GRANDEZZE SCALARI. CHE SONO INDIVIDUATE SOLO DA UN NUMERO

tuttavia, OLTRE LE SCALARI, ESISTONO anche le grandezze vettoriali, per le quali un numero non basta affatto. Queste ultime vengono rappresentate tramite i vettori → lat: VEHO, trasportare. MENTRE UNA GRANDEZZA SCALARE viene rappresentata solamente con un punto su UNA RETTA

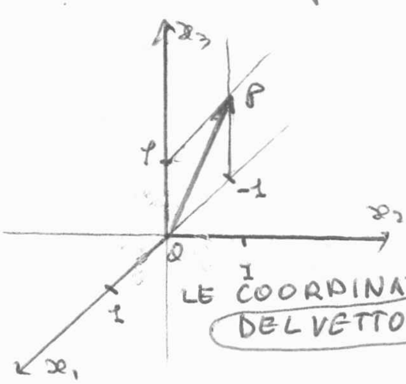
UNA GRANDEZZA VETTORIALE È DATA DA UN SEGMENTO ORIENTATO, DEFINITO DA DUE PUNTI: il punto iniziale (punto di applicazione) di ciascun vettore è l'ORIGINE; IL PUNTO FINALE È IN CORRISPONDENZA DELLA FRECCIA quello rappresentano un vettore geometrico.



le caratteristiche DEL VETTORE SONO:

- → verso (DATO DALLA FRECCIA)
- → direzione (DATA DALLA RETTA SU CUI GIACE)
- → lunghezza DEL SEGMENTO = MODULO DEL VETTORE

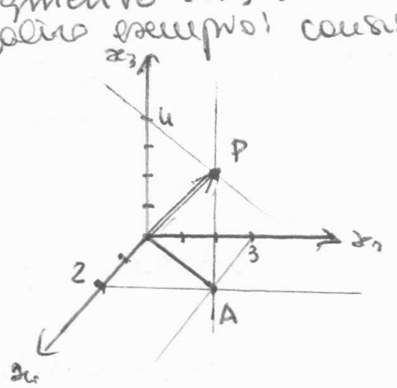
ritornando allo spazio $\mathbb{R}^3$:



si sceglie l'ordine DELLE VARIABILI SUGLI ASSI x_1, x_2, x_3 in modo tale che la terna corrispondente venga disposta in maniera destrorsa (cioè antiorario)

ora si considera la corrispondenza con la relazione fondamentale: (a, b, c) SONO LE COORDINATE DEL VETTORE: dal punto a considerato su x_1, SI MANDA LA parallela all'asse della seconda COORDINATA, b, e viceversa da b si manda la parallela all'asse della prima coordinata: si ottiene il PUNTO A punto di incontro delle parallele e si traccia il segmento OA; da A si manda la parallela al terzo asse, da c la parallela alle rette del segmento OA: IL PUNTO D'INCONTRO È P

altro esempio: consideriamo la terna (2, 3, 4)



mando le parallele agli assi su cui giacciono 2 e 3 e considero il loro punto di intersezione, poi considero la parallela, passante per il punto appena ottenuto, a x_3 e quella passante per le parallele al segmento su cui giace il punto precedentemente ottenuto relativamente alla terna $(-1,0,1)$ considero vettore non solo quello ottenuto graficamente, ma anche $(-1,0,1)$ stesso.

→ dalla soluzione fondamentale si ottiene il VETTORE FONDAMENTALE gli altri vettori appartenenti allo spazio delle soluzioni generali (in questo caso a $(-1,0,1)$) giacciono sulla stessa retta del vettore fondamentale, hanno la stessa direzione e una lunghezza MULTIPLA DI quella lunghezza del vettore fondamentale

Lo spazio delle soluzioni in $\mathbb{R}^3$ è pertanto una retta.

$$Sol\,\Sigma_0 = \{a(-1,0,1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \middle| \underbrace{\begin{cases} x_1 = -1a \\ x_2 = 0a \\ x_3 = 1\cdot a \end{cases}}_{\text{questa è l'equazione parametrica.}}, a\in\mathbb{R}\right\}$$

attenzione! le variabili rappresentabili nel grafico possono essere fino a 3 SULLA CARTA! teoricamente parlando, tuttavia, le variabili considerate possono essere $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

es: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0 \end{cases} \longrightarrow A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix}$ $\quad rg A = 1$

ho $n-r = 3-1 = 2$ variabili libere ⇒

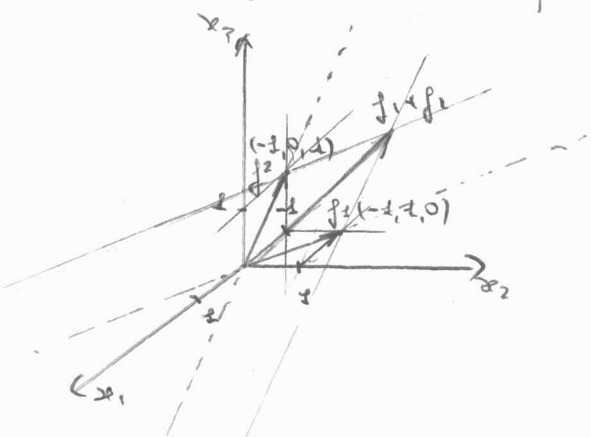
⇒ $Sol\,\Sigma_0 = 2$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\end{pmatrix} \overset{R_2 = 2R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3$$

x_1	x_2	x_3	
-1	1	0	} sono soluzioni fondamentali
-1	0	1	
$-a-b$	a	b	} soluzione generale

$$\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \middle| \begin{cases} x_1 = -a-b \\ x_2 = a \\ x_3 = b \end{cases}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$Sol\,\Sigma_0 = \{(-a-b, a, b) \mid a,b\in\mathbb{R}\} = \{a(-1,1,0)+b(-1,0,1) \mid a,b\in\mathbb{R}\} =$$



l'insieme delle soluzioni generali si trova nel piano GENERATO da f_1 e f_2. INFATTI, PER ESEMPIO, $f_1+f_2 = (-2,1,1) \in$ A TALE PIANO

$Sol\,\Sigma_0$ è il piano generato dalle soluzioni fondamentali f_1 e f_2 $=$

$= \langle\langle f_1, f_2 \rangle\rangle$

Dimostrare che $Sol\,\Sigma_0 =$ piano π che contiene le rette su cui giacciono f_1 e f_2.