PROPRIETÀ della matrice INVERSA. 24-10-2012

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, con $\det A \neq 0$ (quindi invertibile), allora abbiamo le seguenti proprietà riguardanti A^{-1}:

1- $(A^{-1})^{-1} = A$

2- $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

3- Data un'altra matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e invertibile $\Rightarrow$ considero $A\cdot B$

Si cerca $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

↳ dimostrazione: $A\cdot B$ è invertibile: infatti $|A\cdot B| = |A|\cdot|B| \neq 0$ poiché anche $|A|$ e $|B| \neq 0$.

Allora $\exists\,(AB)^{-1}$ tale che $A\cdot B\cdot(A\cdot B)^{-1} = I$.

Moltiplichiamo per A^{-1} a sinistra in entrambi i membri $\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot B(A\cdot B)^{-1} = A^{-1}\cdot I \Rightarrow$

Att! il prodotto fra matrici non è commutativo.

$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}\cdot A)}_{I}B(A\cdot B)^{-1} = \underbrace{A^{-1}\cdot I}_{A^{-1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow B\cdot(AB)^{-1} = A^{-1}$

Moltiplichiamo per B^{-1} a sinistra in entrambi i membri:

$\underbrace{B^{-1}\cdot B}_{I}(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow \boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}}$

4- $(A+B)^{-1} = ?$ → da provare con un esempio e vari test:

es: $A^{-1}+B^{-1} = (A+B)^{-1}$ → ? da verificare.

5- $(\alpha\cdot A)^{-1} = ?$ con $\alpha \neq 0$ → $(\alpha\cdot A)^{-1} = \alpha^{-1}\cdot A^{-1}$? da verificare.

PROPRIETÀ della matrice TRASPOSTA:

Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, abbiamo le seguenti proprietà riguardanti A^T:

1- $(A^T)^T = A$

2- $|A^T| = |A|$ poiché si può partire col calcolo da una riga o una colonna.

3- Data un'altra matrice $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ $\Rightarrow$ considero $A\cdot B$.

Si cerca $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

4- $(A+B)^T = A^T + B^T$

5- $(\alpha\cdot A)^T = \alpha\cdot(A^T)$ $\forall\alpha \in \mathbb{R}$

Att! CONTRARIAMENTE all'inversa, è possibile trovare la trasposta anche di una matrice non quadrata.

Se $A \in \mathcal{M}_{k\times n} \Rightarrow A^T \in \mathcal{M}_{n\times k} \Rightarrow$ le nostre proprietà valgono anche per questo tipo di matrici? → da verificare

: $A \in$

tale che

mpio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

un sistema

$S = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

una ~~...~~ sue matrici:

$\begin{matrix} & 3 & 0 \\ -1 & & 1 \end{matrix}\Big)$ MATRICE DEI COEFFICIENTI

DELLE VARIABILI (VETTORE

TERMINI NOTI (VETTORE DEI TERMIN

forma matriciale:

e matriciale di Σ

vandi ci con relazi

$$\sum_{i=1}^{n} C_A^i \cdot x_i = B$$

Il vettore dei termini noti è dato come combinazione lineare dei vettori colonna delle matrici dei coefficienti.

Sia $\Sigma_0 = \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ sistema lineare omogeneo.

con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2 = R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & 2 \end{pmatrix}$$

→ ha 2 pivot ⇒ il rango della matrice, dunque del sistema è 2.

$$\overset{R_1 = 5R_1 - 3R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

per arrivare alla forma canonica

$$\overset{R_1/10,\ R_2/5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

ora torniamo al nostro sistema

$$\begin{cases} x_1 - \frac{3}{5}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{5}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} = \frac{3}{5}x_3 \\ \boxed{x_2} = -\frac{2}{5}x_3 \end{cases}$$

forma finale del sistema. Ho 2 variabili in funzione di 1. L'unica indipendente (o libera) può assumere qualsiasi valore.

variabili legate = rango del sistema

Ora posso studiare lo spazio delle soluzioni del nostro sistema omogeneo. Da Σ_0 cerco $Sol(\Sigma_0)$ → creo una tabella con n colonne = n variabili indicando con una doppia linea una separazione tra le var. libere e legate

legate: x_1, x_2; libera: x_3

x_1	x_2	x_3
$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1
$\frac{3}{5}a$	$-\frac{2}{5}a$	a

→ è una terna che costituisce una soluzione particolare, detta fondamentale.

$\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$ è sol. FONDAMENTALE di Σ_0

Posso ~~definire~~ assegnare a x_3 un parametro, indicato con una lettera: a

La soluzione generica di Σ_0 è $\left(\frac{3}{5}a, -\frac{2}{5}a, a\right)$, $a \in \mathbb{R}$ ⇒

$\Rightarrow \; a\left(\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$ --> sol. fondamentale

cioè sol. generica = parametro x sol. fondamentale.

Si indica Sol (Σ_0) come:

$$Sol(\Sigma_0) = \left\{ a\left(\frac{3}{5}; -\frac{2}{5}; 1\right), a \in \mathbb{R} \right\}$$

LE SOLUZIONI SONO TANTE QUANTI SONO I VALORI CHE SI POSSONO DARE AD a: ∞^1 RICOPRONO UNA RETTA!!

Ma una domanda fondamentale precede la risoluzione del sistema: quanti ammettono soluzioni?

Osservazioni: I. Ogni sistema lineare omogeneo è sempre risolubile, in quanto ha ALMENO sempre la soluzione nulla --> $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$

II. Se il rango del sistema, $rg\Sigma_0$, coincide col numero delle variabili $\Rightarrow \exists$ sempre solo la soluzione nulla.

III. Se esiste un'unica soluzione, allora è quella nulla.

IMPORTANTE: || IV. Un sistema lineare omogeneo con n variabili e rango r, ha ∞^{n-r} soluzioni.

es: $\Sigma_0 = \{ 2x_1 + 3x_2 - x_1 = 0$ con $A\,(2 \;\; 3 \;\; -1)$

↳ 1 Pivot --> rango matrice = 1

3 variabili $\qquad rg\Sigma_0 = 1$

Sol (Σ_0) ha ∞^2 elementi

$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

costruisco la tabella:

x_1	x_2	x_3
$-\frac{3}{2}$	1	0
$+\frac{1}{2}$	0	1
$-\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b$	a	b

--> 2 sol. fondamentali

La soluzione generica è $\left(-\frac{3}{2}a + \frac{3}{2}b, a, b\right) = a\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) + b\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

con $a, b \in \mathbb{R}$

Sol $(\Sigma_0) = \infty^2$

↳ le due soluzioni ricoprono un piano.