22/10/2012

- Definizione: data $A \in M_{k\times n}$ si dice MINORE di ordine r della matrice A il determinante di una sottomatrice $r\times r$, con $r \leq \min\{k,n\}$, DELLA MATRICE A

es: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}_{2\times3} \rightarrow$ un minore di ordine 2 è ad es. $\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}=-3$

- Proposizione: Una matrice $k\times n$ ha rango $r \Leftrightarrow \exists$ ALMENO un minore non nullo di ordine r ed ogni minore di ordine maggiore è nullo.

Dimostrazione $\rightarrow$ la matrice $\overset{A,\,k\times n}{\vphantom{x}}$ ha rango $r \Rightarrow \exists\, r$ pivot della matrice B ridotta a gradini in forma canonica

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & *\cdots* & 0 & * & * & 0 & & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow r$$

$(* \rightarrow$ numero qualunque$)$

- Considero la sottomatrice di B formata dalle prime r righe e dalle r colonne dei pivot. Tale sottomatrice è $I_r \Rightarrow \det I_r = 1 \neq 0$

$\Rightarrow \exists$ in B un minore di ordine r non nullo $\Rightarrow \exists$ in A un minore di ordine r non nullo perché le operazioni elementari riga non cambiano la nullità del determinante.
↳ identità

Ogni minore di B di ordine $> r$ è nullo perché nella sottomatrice di ordine $> r$ comparirà sempre una riga di tutti 0

$\Rightarrow$ ogni minore di A di ordine $> r$ sarà nullo perché le matrici A e B sono equivalenti.

il viceversa è vero analogamente, sempre per la proprietà delle operazioni elementari riga di non cambiare la nullità del determinante.

Definizione: Il Rango di una matrice $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ è anche definito come l'ordine massimo dei minori non nulli della matrice.

ES.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}_{3\times 4} \Rightarrow \text{Rg}\,A = ?$$

$$\text{Rg}\,A \geq 1 \quad e \quad \text{Rg}\,A \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \text{Rg}\,A \leq 3$$

IN GENERALE: $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $A \neq 0$, $1 \leq \text{Rg}\,A \leq \min\{k,n\}$.

CALCOLIAMO IL RANGO DELLA stessa matrice A: a_{11} è sottomatrice di A con determinante non nullo $\Rightarrow$ Rg A è almeno 1 $\Rightarrow$ Cerco una sottomatrice 2x2 con determinante $\neq 0$

Considero $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$: ma devono essere tutti nulli; se almeno uno non lo è, allora si può dire che il Rango è di almeno ordine 2

Considero $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ $\Rightarrow$ Rg A è almeno 2. Rg A $\geqslant 2$

Quindi cerco le sottomatrici 3x3 E NE CALCOLO I DETERMINANTI:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \text{Rg}\,A = 2$$

Allora la matrice di partenza, $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}$ necessariamente è di Rango 2, poiché non esistono determinanti di sottomatrici 3x3, non nulli.

Proposizione: Sia "e" un'operazione elementare riga, cioè se $A \in M_{k \times n}$ $\Rightarrow e(A)$ sarà la matrice equivalente ottenuta mediante l'operazione "e" $\Rightarrow e(A) = e(I_k)\cdot A$

(da dimostrare per esercizio per tutte le op. el. riga)

es. [moltiplicazione per scalare] $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ e sia $\alpha = -2$ $\Rightarrow A \overset{R_1=-2R}{\sim} \begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&5&6\end{pmatrix}$

sia $I_2 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \overset{R_1=-2R_1}{\sim} \begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&5&6\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}-2&-4&-6\\4&5&6\end{pmatrix}$$

Proposizione: Indico con $e_1, e_2, \dots e_\ell$ ℓ operazioni elementari riga

$$\Rightarrow e_\ell(e_{\ell-1}(e_{\ell-2}(\cdots(e_2(e_1(A)))\dots))) = e_\ell(e_{\ell-1}(e_{\ell-2}(\cdots(e_2(e_1(I_n)))\dots))) \cdot A$$

Dimostrazione: $e_\ell(\cdots(e_2(e_1(A)))\dots) \overset{!}{=} e_\ell(\cdots(e_2(e_1(I)\cdot A))\dots)$

$$\overset{!}{=} e_\ell(\cdots(e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A)\dots)$$

$$\overset{!}{=} e_\ell(I)\cdot e_{\ell-1}(I)\cdot \dots \cdot e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A$$

$$\overset{!}{=} e_\ell(e_{\ell-1}(\cdots(e_2(e_1(I)))\dots)\cdot A$$

Matrice inversa:

{moltiplicata per la matrice data fornisce la matrice identità}

- Calcolo della matrice inversa di una matrice quadrata$_{n\times n}$

Cioè data $A \in M_{n\times n}$, determinare $B \in M_{n\times n} \mid A\cdot B = B\cdot A = I$.

La matrice inversa di A, DETTA A^{-1}, esiste se e solo se il rango di A è n, ovvero è massimo, cioè $\det A \neq 0$

Giustifichiamo tale affermazione tramite questa osservazione:

se $\exists A^{-1} \Rightarrow A\cdot(A^{-1}) = I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}| = 1$ per il teorema di Binet $|A\cdot A^{-1}| = |A|\cdot|A^{-1}|$

$\Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$! ed inoltre $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$.

è il reciproco del det (A)

Supponiamo (DUNQUE) che $|A| \neq 0$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \exists$ r OPERAZIONI ELEMENTARI $e_1, e_2, \dots, e_r$ TALI CHE

$$\boxed{e_r(e_{r-1}(\dots(e_2(e_1(A)))\dots)) = I}$$

è la forma a gradini Canonica

$$\Rightarrow \underbrace{e_r(e_{r-1}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots))}_{\text{allora deve essere } A^{-1}} \cdot A = I$$

$$\Rightarrow e_r(e_{r-1}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots)) = A^{-1}$$

$\Rightarrow$ Per trovare A^{-1}:

I MODO:

PONGO $(A \,\vdots\, I)$ $\rightarrow$ svolgo tutte le operazioni elementari riga $e_1, \dots, e_r$

IN MODO CHE $e_r(e_{r-1}(\dots(e_2(e_1(A \,\vdots\, I)))\dots)) = (I \,\vdots\, A^{-1})$

es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = ?$ $(A \,\vdots\, I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 = 2R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$

$$\overset{R_1/2}{\underset{R_2/4}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \end{array}\right)$$

(AGGIUNTA)

2° modo - Si definisce <u>aggiunta</u> di $A \in M_{n \times n}$ la matrice $A^{*} = \left((-1)^{i+j} \left| A_{\hat{i}\hat{j}} \right| \right) \in M_{n \times n}$;

SI CONSIDERA $(A^{*})^{T}$

(RICORDO CHE Nella matrice trasposta si scambiano le righe con le colonne)

$$// \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} (A^{*})^{T}}$$