Determinante

$A \in M_{N \times N}$

$N = 3$

Elimino la riga (k)
e la colonna (n) al
cui $\underbrace{\text{incrocio}}$ si trova l'entrata a_{kn}

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (3+2) - 2 \cdot (-6) - (0+3) =$$

$$\boxed{= 14}$$

RICORDO:

$\mathrm{Det}(B) = \left| B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$

$= ad - bc$

$n = 4$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-0) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$

Scelgo una riga o colonna (la più conveniente per quanto riguarda calcoli)

Ora calcolo i Det. delle matrici 3x3!

CALCOLO IL DETERMINANTE DELLA stessa matrice precedente $(n=4)$, scegliendo una colonna:

$\Downarrow$

(1ª colonna)

$$\Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = ?$$

IL DETERMINANTE NON E' CAMBIATO!

Definizione:

DATA L'ENTRATA a_{ij} DI UNA MATRICE QUADRATA $A \in M_{n \times n}$, SI DICE COMPLEMENTO ALGEBRICO DI a_{ij}, IL NUMERO $(-1)^{i+j} \cdot |A_{\hat{ij}}|$.

Sottomatrice di A, a cui sono state tolte la i-esima riga e la j-esima colonna

---

DEFINIZIONE: DATA UNA MATRICE $A \in M_{n \times n}$

$$\Rightarrow |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{\hat{ij}}|$$

↳ se decido di tenere "i" fisso (CIOE' SCELGO UNA RIGA)

Oppure

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot |A_{\hat{ij}}|$$

↳ Se decido di tenere "j" fisso (CIOE' SCELGO UNA COLONNA)

Regola di Laplace

Vale $\forall$ matrice $\in M_{n \times n}$

PROPRIETÀ DEL DETERMINANTE:

1) Se una riga | colonna di A è formata solo da zeri, allora $Det(A) = 0$.

2) Se A è diagonale, allora $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

3) Se A è triangolare superiore (o inferiore), allora $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

4) Se scambio una riga con un'altra adiacente, allora il determinante cambia di segno.

4') Se scambio una riga con un'altra qualsiasi, allora il determinante cambia comunque di segno.

5) Se moltiplico una riga di A per uno scalare λ, allora il determinante della nuova matrice è pari a $\lambda \cdot |A|$.

6) $Det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot Det(A)$, dove n è l'ordine della matrice

7) $Det(A+B) \neq Det(A) + Det(B)$
(DARE UN CONTROESEMPIO)

8) Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & b_{i3}+c_{i3} & & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ESEMPIO

$n=2$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} = & & = & & = \\ 22 & = & 10 & + & 12 \end{matrix}$$

9) Se $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha R_i + \beta R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow Det(B) = \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \beta R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \alpha \overbrace{\begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}}^{|A|} + \beta \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix}$$

10) Se $A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-esima riga} \\ \leftarrow j\text{-esima riga} \\ \\ \\ \end{array}$

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i\text{-esima riga} \\ \leftarrow j\text{-esima riga} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{Det}(A) = 0$

10') Se in una matrice una riga è α volte un'altra, ovvero

$$A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{Det}(A)} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \alpha \cdot 0 = \boxed{0}$$

TORNIAMO ALLA 9) $\Rightarrow$

$$\alpha \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} = \alpha |A| + \beta \cdot 0 = \alpha |A|$$

Riassumendo:

Se $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \alpha R_i + \beta R_j \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \operatorname{Det}(B) = \alpha \cdot \operatorname{Det}(A)$

[Se $\alpha = 1$
$\Rightarrow$ le due matrici equivalenti hanno lo stesso determinante]

POICHÉ NON FA MUTARE IL DETERMINANTE DELLE DUE MATRICI EQUIVALENTI,

L'operazione elementare riga CHE CAMBIA UNA RIGA R_i CON UNA SUA COMBINAZIONE LINEARE DEL TIPO

$$R'_i = R_i + \beta R_j$$

É detta <u>determinantale</u>

Le proprietà sopra elencate valgono anche per le colonne di una matrice.

---

12) Teorema di BINET

Date due matrici A e $B \in M_n$

$\Rightarrow A \cdot B \in M_n$

e $Det(A \cdot B) = Det(A) \cdot Det(B)$