

Nell'insieme $M_{k \times n}(R)$, dove abbiamo già introdotto l'operazione "somma", introduciamo l'operazione di "prodotto per uno scalare": $\cdot \lambda$

$$\begin{aligned} \cdot \lambda : R \times M_{k \times n} &\longrightarrow M_{k \times n} \\ (\lambda, A) &\longrightarrow \lambda \cdot A \end{aligned}$$

$$\text{se } A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} \Rightarrow \lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}}$$

es.

$$\lambda = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

• L'OPERAZIONE GODE DELL'ASSOCIATIVITÀ

$$\lambda \cdot (\mu A) = (\lambda \mu) \cdot A \quad \forall A \in M_{k \times n}, \lambda, \mu \in R$$

• L'ELEMENTO NEUTRO ESISTE ed è $\lambda = 1$

• GODE DI PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in R, A, B \in M_{k \times n}$$

Introduciamo la MOLTIPLICAZIONE TRA MATRICI:

Consideriamo due matrici A e B $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, n}} \quad B = (b_{lm})_{\substack{l=1, \dots, n \\ m=1, \dots, s}} \in M_n$

(BISOGNA DEFINIRE L'ORDINE DI B)

$$\text{definendo } A \cdot B = C = (c_{fg}) \quad \text{con } c_{fg} = \sum_{h=1}^n a_{fh} b_{hg}$$

es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} -6 & 10 & 2 \\ -5 & 11 & -5 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0_{11} \cdot b_{11} + 0_{12} \cdot b_{21} + 0_{13} \cdot b_{31} = 1 \cdot 1 - 4 \cdot 3 = -6 \\ c_{12} &= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 2 + 6 = 10 \\ c_{13} &= 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = -1 + 3 = 2 \\ c_{21} &= 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) = 4 - 10 + 1 = -5 \\ c_{22} &= 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 8 + 5 - 2 = 11 \\ c_{23} &= 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -4 + 0 - 1 = -5 \end{aligned}$$

N.B.

AFFINCHÉ DUE MATRICI POSSANO ESSERE MOLTIPLICATE TRA LORO IL NUMERO DI COLONNE DELLA PRIMA DEVE ESSERE UGUALE AL NUMERO DI RIGHE DELLA SECONDA

la matrice finale $C \in M_{k \times s}$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad A \cdot B = C = (c_{fg}) \quad \text{con } c_{fg} &= \sum_{h=1}^n a_{fh} b_{hg} \\ M_{k \times n} \times M_{n \times s} &\longrightarrow M_{k \times s} \end{aligned}$$

IL PRODOTTO TRA MATRICI NON È COMMUTATIVO. Tanto che a volte non è neanche fattibile.

15/10/12 (2)

ANCHE QUANDO È SEMPRE FATTIBILE (^{con} ~~alle~~ matrici quadrate)
IL PRODOTTO NON È COMMUTATIVO.

Controesempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & 1+6 \\ -3+8 & 3+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -2+4 \\ 2+9 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE NON È COMMUTATIVA.

Verifichiamo se gode di altre proprietà, considerando il prodotto tra matrici quadrate, quindi in $M_{n \times n}$

DIMOSTRIAMO PER MATRICI QUADRATE 2×2 .

Si dimostra che è ASSOCIATIVO (Verificare) $[A(BC) = (AB)C]$ MEDIANTE LA DEFINIZIONE DATA

ELEMENTO NEUTRO $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ TALE CHE

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \\ cx_1 + dx_3 = c \\ cx_2 + dx_4 = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & a \\ 0 & a & 0 & b & b \\ c & 0 & c & 0 & c \\ 0 & c & 0 & d & d \end{array} \right) \sim$$

Supponendo $a, c \neq 0$

$$R_2 \leftarrow CR_1 - aR_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & a \\ 0 & a & 0 & b & b \\ 0 & 0 & cb-ad & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d & d \end{array} \right) \sim R_4 \leftarrow cbR_2 - aR_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & a \\ 0 & a & 0 & b & b \\ 0 & 0 & cb-ad & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cb-ad & cb-ad \end{array} \right) \sim$$

$$\text{Poiché } cb-ad \neq 0 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a & 0 & b & 0 & a \\ 0 & a & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + 0 = a \\ ax_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{a} \cdot 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases} \rightarrow \text{L'ELEMENTO Nullo È LA MATRICE}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(con $a, c \neq 0$ e $cb-ad \neq 0$)

Supponendo $a \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$ (alternando le prime colonne si vede nulla)

e ~~fora~~ $\begin{pmatrix} c & 0 & d & 0 & | & c \\ 0 & c & 0 & d & | & d \\ 0 & 0 & b & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & | & b \end{pmatrix}$ Poi supporre $c=0 \Rightarrow a \neq 0$ $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & | & a \\ 0 & a & 0 & b & | & b \\ 0 & 0 & d & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & | & d \end{pmatrix}$

Supponendo poi $cb - ad = 0$ guai

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & | & a \\ 0 & a & 0 & b & | & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} ax_1 + bx_3 = a \\ ax_2 + bx_4 = b \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{b}{a}x_3 \\ x_2 = \frac{b}{a} - \frac{b}{a}x_4 \end{cases}$$

abbiamo due variabili libere, non si ha un'unica soluzione

ALLORA BISOGNA ACCETTARE $cb - ad \neq 0$ PER OTTENERE UN'UNICA SOLUZIONE.

BISOGNA DIMOSTRARE LA COMUTATIVITÀ DELL'ELEMENTO NEUTRO

$$A \cdot I = A$$

$$\text{e } I \cdot A = A$$

INVERSO DI UNA MATRICE

Dato $A \in \mathbb{M}_{n \times n}$ NON SEMPRE $\exists$ il sovrainverso, cioè la matrice $B \in \mathbb{M}_{n \times n}$ $(AB=BA=I)$

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax_1 + bx_3 & ax_2 + bx_4 \\ cx_1 + dx_3 & cx_2 + dx_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IMPOSTARE IL SISTEMA E RISOLVERLO PER DETERMINARE $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$
 nella dimostrazione si giunge a due percorsi $ad - bc \neq 0$

se $\exists B$ si indica con A^{-1}

DETERMINANTE : è un numero (eff) associato alla matrice
calcolabile solo nelle matrici quadrate.

Lo definiamo per matrici $n \times n$ o valore di n

1) per $n=1$ $A=(a_{11}) \Rightarrow$ IL DETERMINANTE coincide con il numero stesso
 $\det(A), \det(A) \text{ o } |A| = a_{11}$

2) per $n=2$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

3) per $n=3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A|$

• scegliere una riga o una colonna

es. la prima

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

matrice ottenuta
eliminando la colonna e la riga
di a_{ij}

$$|A| = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$