ESEMPI DI COMBINAZIONE LINEARE

1) BARICENTRO

Supponiamo che nello spazio siano dati k corpi di dimensioni trascurabili di massa m_i per $i = 1, \dots, k$ e disposti nei punti v_i di coordinate (x_i, y_i, z_i) $i = 1, \dots, k$. Indichiamo con M la massa complessiva, $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Il BARICENTRO O CENTRO DI MASSA è per definizione il vettore G:

$$G = \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 + \dots + \frac{m_k}{M} v_k$$

cioè la combinazione lineare dei vettori posizione $v_1, \dots, v_k$, CON $v_i = (x_i, y_i, z_i)$

$$G = \frac{m_1}{M}(x_1, y_1, z_1) + \frac{m_2}{M}(x_2, y_2, z_2) + \dots + \frac{m_k}{M}(x_k, y_k, z_k)$$

$$= \left(\sum_{1}^{k}{}_i \, x_i \frac{m_i}{M} , \sum_{1}^{k}{}_i \frac{m_i}{M} y_i , \sum_{1}^{k}{}_i \frac{m_i}{M} z_i \right)$$

Il baricentro è un esempio di media pesata, ed è importante per diversi motivi: ad esempio

i) la forza di gravità è applicata al baricentro del corpo

ii) In un sistema isolato il baricentro si muove di moto rettilineo uniforme

iii) in generale il baricentro di un sistema soddisfa la legge di Newton $F = ma$, con F = risultante delle forze, m è la massa totale, a = accelerazione del baricentro

ii) MEDIA E MEDIA PESATA

Tre $\underbrace{\text{studenti}}^{A,B,C}$ sostengono due parti di un esame riportando i seguenti voti

STUDENTE	A	B	C
PRIMA PARTE	20	24	26
SECONDA PARTE	28	30	24

Questi dati si riportano in forma vettoriale $v_1 = (20, 24, 26)$ e $v_2 = (28, 30, 24)$. Il voto complessivo per ogni studente è la media aritmetica dei due voti, data dal vettore:

$$m_{1,2} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \left(\frac{20+28}{2}, \frac{24+30}{2}, \frac{26+24}{2} \right) = (24, 27, 25)$$

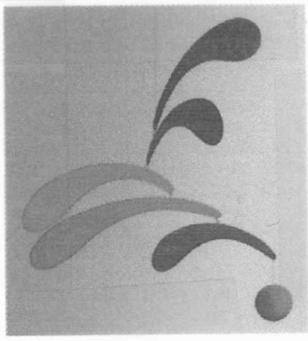
Se le due parti dell'esame hanno pesi diversi in crediti $\Rightarrow$ dobbiamo fare una combinazione lineare diversa: se la prima parte corrisponde a 5 crediti e la seconda 3 il voto del primo esame deve pesare $\frac{5}{8}$ del totale, il voto del secondo $\frac{3}{8}$ del totale: il voto finale si ottiene

$$\frac{5}{8} v_1 + \frac{3}{8} v_2 = (23; 26,25; 25,25)$$

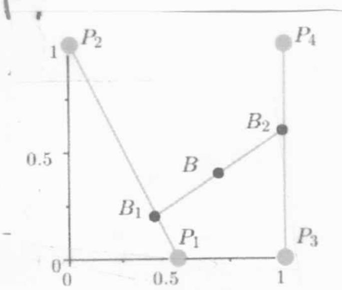
ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

iii) Sculture cinetiche

L'artista "cinetico" A. CALDER (1896 - 1976) ha realizzato molte sculture composte da più elementi, nelle quali la posizione dei baricentri hanno un ruolo importante. La scelta dei punti di sospensione rende possibile il movimento delle parti senza perdere la stabilità complessiva.



Schematizziamo una sua opera: 4 punti pesanti con coordinate $P_1=\left(\frac{1}{2},0\right)$; $P_2(0,1)$; $P_3=(1,0)$ e $P_4=(1,1)$ sono uniti a coppie da asticelle di massa trascurabile.



Le asticelle sono unite da un'ulteriore asta $B_1 B_2$ e tutta la struttura è sospesa per il punto B. I pesi dei punti sono diversi P_1 pesa 4, P_2 pesa 1, P_3 pesa 2, P_4 pesa 3.
La struttura è stabile se B_1 è il baricentro di $P_1 P_2$ e B_2 è il baricentro di $P_3 P_4$ e B è il baricentro complessivo del sistema. Calcoliamo dove cade B!

La massa di $P_1 P_2$ è 5 $\Rightarrow$ $B_1 = \frac{4}{5} P_1 + \frac{1}{5} P_2 =$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{5}(0,1) = \left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$$

La massa complessiva di $P_3 P_4$ è 5 $\Rightarrow$ $B_2 = \frac{2}{5} P_3 + \frac{3}{5} P_4$

$$= \frac{2}{5}(1,0) + \frac{3}{5}(1,1) = \left(1,\frac{3}{5}\right)$$

La massa complessiva di $B_1 B_2$ è 10 $\Rightarrow$ $B = \frac{5}{10} B_1 + \frac{5}{10} B_2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(1,\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)$$

ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

BARICENTRO DI UN CORPO (MEDIA PESATA)

IN UNO SPAZIO AMBIENTE k CORPI DI DIMENSIONI TRASCURABILI DI MASSA m_i ; $i=1,k$ IN PUNTI v_i DI CORDINATE (x_i, y_i, z_i) $i=1,k$

LA MASSA COMPLESSIVA $M=\sum_{i=1}^{k} m_i \Rightarrow$ IL BARICENTRO

$G = \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 + \dots + \frac{m_k}{M} v_k$; G È COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI v_i

DEFINIZIONE

IN UNO SPAZIO VETTORIALE $(V; +, \cdot\alpha)$ DATI $v_1 \dots v_k \in V \Rightarrow$

CHIAMIAMO SOTTOSPAZIO GENERATO DAI VETTORI $v_1, \dots, v_k$ IL SOTTOSPAZIO DI V FORMATO DA TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DI $v_1, \dots, v_k$; $\langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_i \in \mathbb{R}$
$\forall i = 1, \dots, k\}$ (VERIFICA CHE È UN SOTTOSPAZIO DI V)

CIOÈ: $0 \in \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$; SE $w_1, w_2 \in \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle \Rightarrow w_1 + w_2 \in \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$
e SE $v \in \langle\langle v_1, \dots v_k \rangle\rangle \Rightarrow \beta v \in \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$

$\forall \beta \in \mathbb{R}$

DEFINIZIONE

$v_1, \dots, v_k$ SONO DETTI GENERATORI DI TALE SOTTOSPAZIO

DEFINIZIONE: DICIAMO BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE V, L'INSIEME $\mathcal{B}$ DI VETTORI $\{v_1, \dots v_k\}$ QUANDO:

1) $v_1, \dots, v_k$ GENERANO V

2) $v_1, \dots, v_k$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESEMPIO:

IN $\mathbb{R}^2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{v_1, v_2\}$ È BASE DI $\mathbb{R}^2$

INFATTI: 1) v_1, v_2 SONO L. INDIPENDENTI PERCHÉ L'UNO NON È MULTIPLO DELL'ALTRO

2) v_1, v_2 GENERANO $\mathbb{R}^2$ CIOÈ $\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE:

1) $\ll v_1, v_2 \gg \subseteq \mathbb{R}^2$ e 2) $\mathbb{R}^2 \subseteq \ll v_1, v_2 \gg$; 1) È VERO BANALMENTE

2): $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - \beta \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} \alpha = x \\ \beta = 2x - y \end{cases} \Rightarrow$ OGNI ELEMENTO $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ DI $\mathbb{R}^2$ È COMBINAZIONE LINEARE DI v_1 E v_2

DEFINIZIONE: SI DICE DIMENSIONE DI V, SPAZIO VETTORIALE, LA CARDINALITÀ DI UNA SUA BASE, CIOÈ IL # DI ELEMENTI DELLA BASE $\mathcal{B}$

POSSIAMO ANCHE DIRE, CHE UNA BASE DI V È COSTITUITA DA VETTORI CHE COSTITUISCONO IL NUMERO MASSIMO DI GENERATORI DI V, LIN. INDIPENDENTI.

PROPOSIZIONE: $\exists$ INFINITE BASI DI V

PROPOSIZIONE:

$\boxed{\text{OGNI BASE DI } V \text{ HA LA STESSA CARDINALITÀ}}$

ESEMPIO: IN $\mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

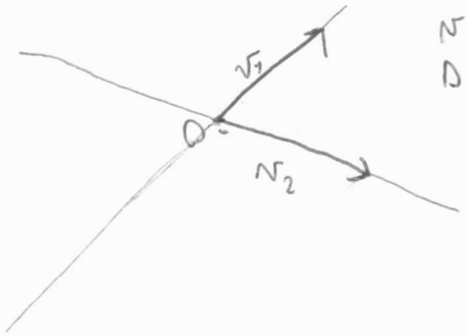
$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ È BASE DI $\mathbb{R}^3$? POICHÉ LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^3$ È TRE, OGNI BASE DI $\mathbb{R}^3$ È FORMATA DA 3 VETTORI! BASTA DIMOSTRARE CHE I TRE VETTORI DATI SONO LINEARM. INDIPENDENTI, CIOÈ POSTO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$
$\Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1,2,3$: $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ QUESTA EQUAZIONE VETTORIALE, DÀ ORIGINE AD UN SISTEMA Σ_0 SCALARE, LA CUI MATRICE DEI COEFFICIENTI È: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; RANGO $A = ? \Rightarrow |A| = 5 + 5 = 0 \Rightarrow R_G A = 2$

$\Rightarrow$ IL SISTEMA Σ_0 HA $\infty^{3-2} = \infty^1$ SOLUZ. QUINDI $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ NON È SOLO LA TERNA NULLA E QUINDI v_1, v_2, v_3 SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, INFATTI $v_3 = v_1 - 2v_2$

DEFINIZIONE: IN $\mathbb{R}^n$ $\exists$ IN UNA BASE DETTA CANONICA $\mathcal{C}$ CIOÈ

$\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

IN $\mathbb{R}^2$ DARE UNA BASE $\mathcal{B} = \{v_1 ; v_2\}$ SIGNIFICA DARE UN RIFERIMENTO:

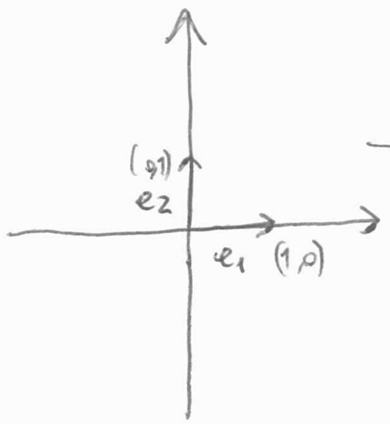


$v \in \mathbb{R}^2$ È ~~COMBINAZIO~~ COMBINAZIONE LINEARE DELLA BASE DATA.

$\mathbb{R}^2$ = SPAZIO VETTORIALE $\Rightarrow$

$v = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ SONO DETTE LE

<u>COORDINATE</u> DI v NELLA BASE DATA



$\rightarrow$ QUESTO RIFERIMENTO È DATO DALLA BASE CANONICA $\{e_1, e_2\}$ DI $\mathbb{R}^2$.