Insieme dei Polinomi 7-11-2012

$\mathbb{R}[x] = \{$polinomi in una variabile a coefficienti **REALI** $\}$

è uno spazio vettoriale reale $(\mathbb{R}[x]; +; \cdot\alpha)$.

INFATTI:

Consideriamo l'operazione "+" $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}[x]$

$$(p,q) \longmapsto p+q$$

COSÌ DEFINITA

se $p(x)$ è di grado k cioè $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$

e se $Q(x)$ è di grado n cioè $Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + a_n x^n$

$\Rightarrow (p+q)(x)$ è un polinomio di grado $r = \max(k, n) \Rightarrow (p+q)(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_j + b_j)x^j + \dots + (a_r + b_r)x^r$

e "$\cdot\alpha$" $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \longmapsto \mathbb{R}[x]$

$(\alpha, p) \longmapsto \alpha p$ dove posto $p(x) = a_0 + \dots + a_k x^k$,

$(\alpha, p)(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_k x^k$

- per la somma

se p, q, l sono polinomi di gradi k, n, m rispettivamente $\Rightarrow$

1) $(p+q)+l = p+(q+l)$: Sono uguali se hanno lo stesso grado e i coefficienti dei termini di grado j sono uguali $\forall j = 0, \dots, \max[k, n, m]$

infatti $P(x)$ e $Q(x)$ come sopra e $l(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m$ i termini di grado j avranno i coefficienti:

$(a_j + b_j) + c_j$ e $a_j + (b_j + c_j)$ essi sono uguali perché la somma in $\mathbb{R}$ è associativa

$\Rightarrow$ la somma tra polinomi è associativa.

è commutativa?

$\exists$ un elemento neutro? $(P(x) = 0)$

$\exists$ l'opposto $\forall P(x)$ $(-P(x))$

VERIFICARE TALI PROPRIETÀ PER ESERCIZIO

PER LA MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE. DIMOSTRARE CHE SONO verificate le proprietà principali: ASSOCIATIVITÀ; ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO, DISTRIBUTIVITÀ.

CONSIDERIAMO uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ COME SPAZIO IN CUI SI TROVANO LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA Σ_0 LINEARE OMOGENEO $k \times n$!

$\Rightarrow \mathrm{Sol}\,\Sigma_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ e Σ_0 è $\underset{k \times n}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{k \times 1}$ — LO SPAZIO AMBIENTE

Proprietà del sotto-insieme di $\mathbb{R}^n$: $\mathrm{Sol}\,\Sigma_0$:

$\mathrm{Sol}\,\Sigma_0$ verifica determinate proprietà:

1) $\exists$ sempre una soluzione nulla
2) Se $v = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathrm{Sol}\,\Sigma_0 \Rightarrow \alpha v \in \mathrm{Sol}\,\Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3) Se $v_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ e $v_2 = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathrm{Sol}\,\Sigma_0 \Rightarrow$

$v_1 + v_2 = (\tilde{x}_1 + \bar{x}_1, \tilde{x}_2 + \bar{x}_2, \dots, \tilde{x}_n + \bar{x}_n) \in \mathrm{Sol}\,\Sigma_0$

infatti se considero l'equazione $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = 0$ di Σ_0 e sostituisco $a_{j1}(\tilde{x}_1 + \bar{x}_1) + a_{j2}(\tilde{x}_2 + \bar{x}_2) + \dots + a_{jn}(\tilde{x}_n + \bar{x}_n) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{a_{j1}\tilde{x}_1 + a_{j2}\tilde{x}_2 + \dots + a_{jn}\tilde{x}_n}_{0} + \underbrace{a_{j1}\bar{x}_1 + a_{j2}\bar{x}_2 + \dots + a_{jn}\bar{x}_n}_{0} = 0 \quad \boxed{\forall j = 1, \dots, k}$

Se $(V, +, \cdot\alpha)$ è spazio vettoriale e $W \subseteq V \Rightarrow W$ è detto SOTTO SPAZIO VETTORIALE di V se soddisfa le condizioni:

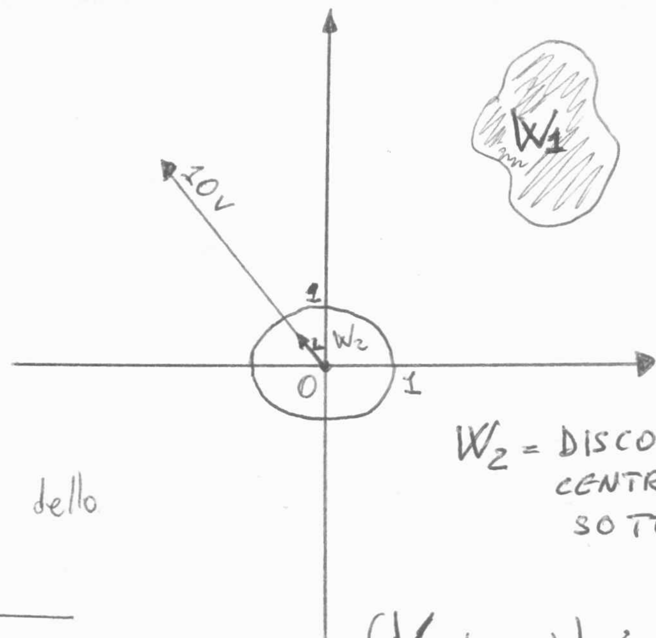
1) $0 \in W$
2) $\alpha v \in W \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in W$
3) $v_1 + v_2 \in W \quad \forall v_1, v_2 \in W$

SI DICE ANCHE CHE: W è chiuso rispetto alle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare di V

Esempi

1) $\mathrm{Sol}\,\Sigma_0$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$

2) $V = \mathbb{R}^2$



W_1 non è sottospazio vettoriale

$r = 1$

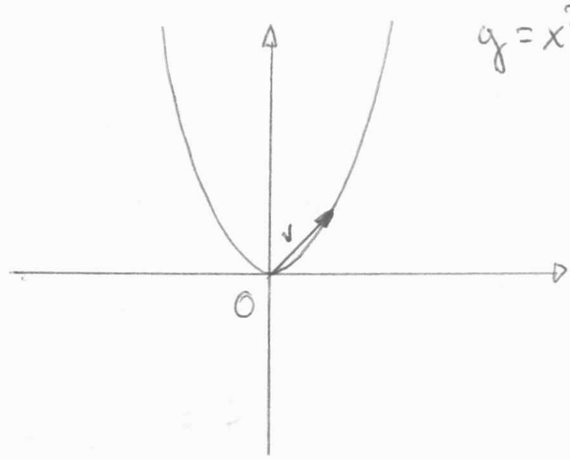
W_2 = DISCO DI RAGGIO 1 E CON CENTRO (0,0) NON È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

I vettori sono elementi dello spazio vettoriale

DATO UNO SPAZIO VETTORIALE $(V, +, \cdot\alpha)$:

V è sempre sottospazio vettoriale di se stesso
{0} è sempre sottospazio vettoriale di V
} sottospazi banali

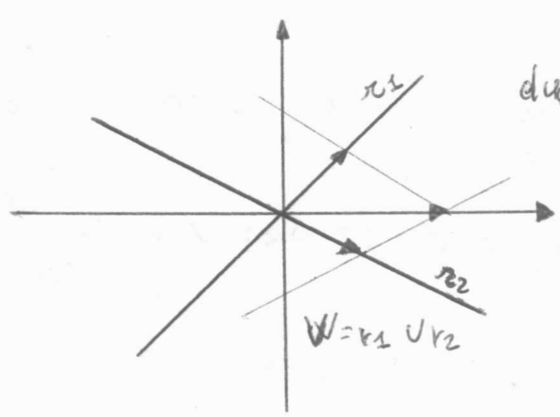
3) Tutte le rette passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$



$y = x^2$

non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

4) $W = r_1 \cup r_2$



No perché la somma tra due vettori che ~~passano~~ stanno sulle rette passanti per l'origine, ~~...~~ esce dallo spazio W ~~vettoriale...~~ CHE QUINDI NON È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^2$

I SOTTOSPAZI VETTORIALI PROPRI DI $\mathbb{R}^n$ SONO: LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE, I PIANI PASSANTI PER L'ORIGINE, GLI SPAZI TRIDIMENSIONALI PASSANTI PER L'ORIGINE, ..., GLI SPAZI (n-1)-DIMENSIONALI PASSANTI PER L'ORIGINE.

Se $W \subseteq V$ é sottospazio vettoriale indicheremo così $W \leq V$ (sotto spazio vettoriale)

Definizioni

1) Dati $V_1, \ldots, V_n$ vettori di V spazio vettoriale $\Rightarrow$ si dice <u>combinazione lineare</u> degli n vettori il vettore di V così definito $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

2) Gli n vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono detti <u>linearmente indipendenti</u> se ~~posto~~ $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_n V_n = 0 \overset{\text{(se e solo se)}}{\Longleftrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

"$\Leftarrow$" é ovvio

"$\Rightarrow$" la necessitá é da dimostrare

3) Vettori che non sono linearmente indipendenti si dicono <u>linearmente dipendenti</u>

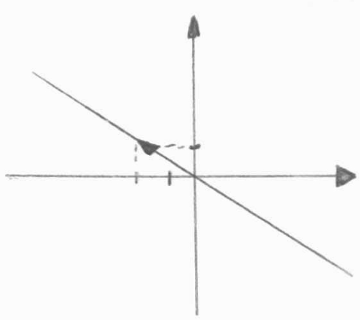
Esempi $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, 3)$, $V_2 = (2, 4, 6)$ sono linearmente indipendenti?

pongo $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0$

$\alpha_1 (1, 2, 3) + \alpha_2 (2, 4, 6) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2 + 4\alpha_2 + 6\alpha_2) = (0, 0, 0)$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 4\alpha_2, 3\alpha_1 + 6\alpha_2) = (0, 0, 0)$



$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + 6\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad \underset{3\times2}{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$x = -2y$

$(-2, 1)$ é soluzione fondamentale ED É DIVERSA DALLA SOLUZIONE NULLA QUINDI V_1 E V_2 SONO <u>LIN. DIPENDENTI</u>

$rg\, A = 1 \Rightarrow Sol\, \Sigma_0$ ha ∞^{2-1} soluzioni ; UNA RETTA INTERA DI SOLUZIONI

$\Rightarrow$ SI NOTI CHE, DATI DUE VETTORI V_1 e V_2, I vettori sono linearmente dipendenti se V_1 é multiplo di V_2 e quindi se e solo se ($\Longleftrightarrow$) giacciono nella stessa retta per l'origine

<u>Proposizione</u> $\rightarrow$ Data una matrice $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ il rango di A coincide con il numero massimo di vettori riga (o vettori colonna) di A linearmente indipendenti.

Il vettore <u>nullo</u> é linearmente dipendente : DIMOSTRARLO