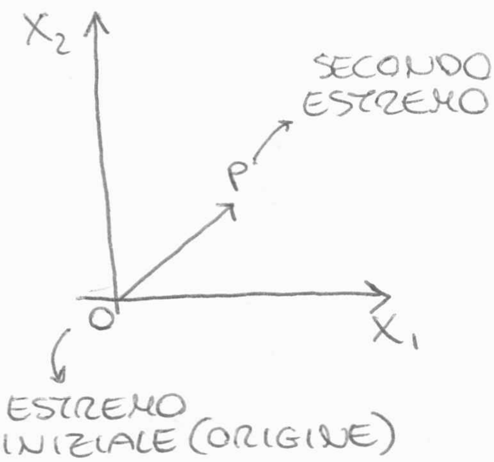
05/11/2012

GEOMETRICO
- VETTORE: ente rappresentato da un segmento ORIENTATO IN UNO SPAZIO n-DIMENSIONALE



• Il vettore viene espresso dalle coordinate dell'estremo finale $P(X_1, X_2)$

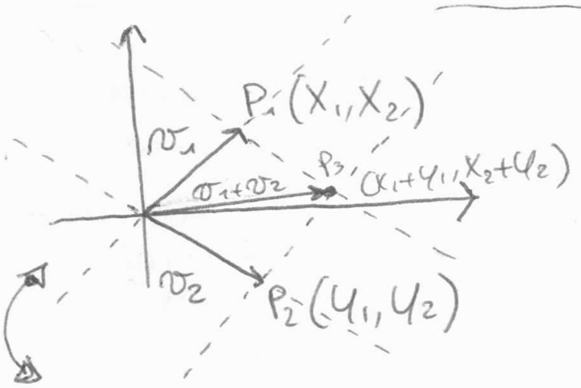
OPERAZIONI TRA VETTORI:
- I vettori geometrici possono essere SOMMATI:

LA SOMMA "+" : $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ È UN'OPERAZIONE BINARIA INTERNA

$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

COSÌ DEFINITA ⇒ $(X_1+Y_1, X_2+Y_2) = v_1 + v_2$

COME SOMMA DI MATRICI



[STUDIARE LE PROPRIETÀ DELLA SOMMA]

GEOMETRICAMENTE si tracciano le parallele, MANDATE DAI LORO SECONDI ESTREMI, ai vettori - il punto ottenuto dall'intersezione DI TALI RETTE è il secondo estremo del vettore somma.

"·α" : $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(\alpha, v) \longmapsto \alpha v$

MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE:

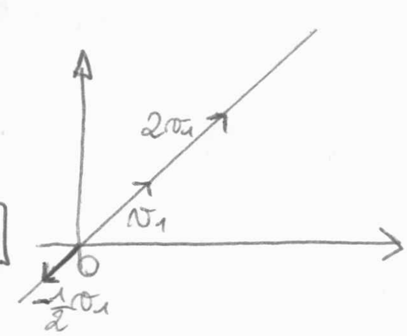
αv_1

$|\alpha v_1| = |\alpha| \cdot |v_1|$;

↳ LUNGHEZZA VETTORE : SI SCRIVE $\| v_1 \|$.

VERSO VETTORE { UGUALE se $\alpha > 0$; OPPOSTO se $\alpha < 0$

[STUDIARE LE PROPRIETÀ DELL'OPERAZIONE]



$$\underbrace{\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2}_{\text{• PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA}}$$

PRODOTTO SCALARE TRA VETTORI

- notazioni: $v_1 \cdot v_2$; (v_1, v_2) ; $\langle v_1, v_2 \rangle$

· Posti $v_1 = (x_1, x_2)$ e $v_2 = (y_1, y_2)$ $\rightarrow$ $v_1 \cdot v_2 = (x_1 y_1 + x_2 y_2)$

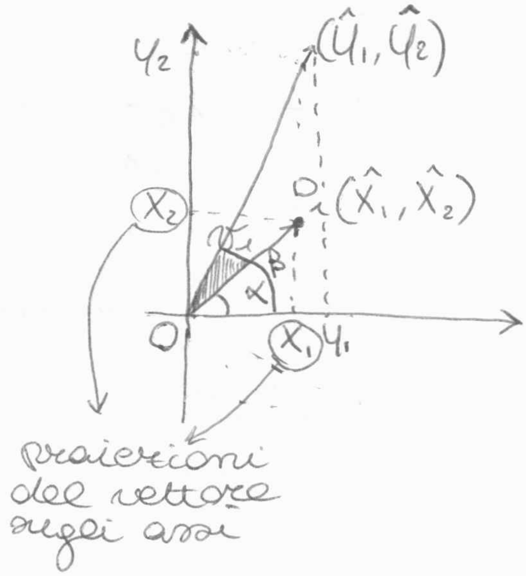
SI ESTENDE IN DIMENSIONE QUALUNQUE;

- É un' operazione in $\mathbb{R}^n$ definita come "$\cdot$"

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 \cdot v_2$$

NON É INTERNA, poiché il codominio é diverso DAGLI INSIEMI del dominio

ESERCIZIO: determinare e verificare le proprietá del prodotto scalare



$\hat{x}_1 = \|v_1\| \cos\alpha$

$\hat{x}_2 = \|v_1\| \sin\alpha$

NORMA = (= lunghezza) vettore

$\|v_1\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

$\hat{y}_1 = \|v_2\| \cos\beta$

$\hat{y}_2 = \|v_2\| \sin\beta$

$$v_1 \cdot v_2 = \hat{x}_1 \hat{y}_1 + \hat{x}_2 \hat{y}_2 = \|v_1\| \cos\alpha \cdot \|v_2\| \cos\beta + \|v_1\| \sin\alpha \, \|v_2\| \sin\beta$$

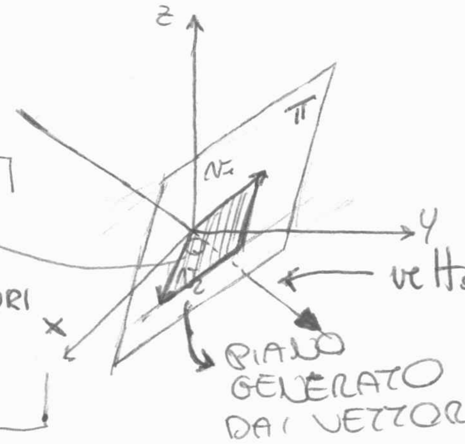
$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| (\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta) = \|v_1\| \, \|v_2\| \cos(\underbrace{\beta - \alpha}_{\text{angolo compreso FRA I VETTORI}})$$

PRODOTTO VETTORIALE TRA VETTORI

notazioni: $V_1 \times V_2$; $V_1 \wedge V_2$

Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ $\quad v_1 = (x_1, y_1, z_1)$

(VALE SOLO PER VETTORI DI $\mathbb{R}^3$) $\quad v_2 = (x_2, y_2, z_2)$



$\langle\langle v_1, v_2 \rangle\rangle = \pi$ = PIANO GENERATO DAI VETTORI V_1 e V_2

(*) L'AREA DE PARALLELOGRAMMA COSTRUITO SUI VETTORI V_1 E V_2: LUNGHEZZA VETTORE $V_1 \times V_2$

vettore $V_1 \times V_2$

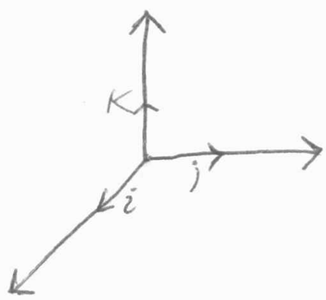
PIANO GENERATO DAI VETTORI V_1 e V_2

$V_1 \times V_2$ HA PER DIREZIONE LA RETTA PERPENDICOLARE AL PIANO π, IL VERSO VIENE DEFINITO CON LA REGOLA DELLA MANO DESTRA E LA SUA LUNGHEZZA È (*)

LE COORDINATE DEL VETTORE $V_1 \times V_2$, DATE QUELLE DI $V_1 = (x_1, y_1, z_1)$ E $V_2 = (x_2, y_2, z_2)$ POSTE: $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ I SUOI MINORI 2x2 SONO LE COORDINATE DI $V_1 \times V_2$

SONO: $v_1 \times v_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2, -(x_1 z_2 - z_1 x_2), x_1 y_2 - y_1 x_2)$

È ANTICOMMUTATIVO; VEDERE LE ALTRE PROPRIETÀ



$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \hat{i}(y_1 z_2 - z_1 y_2) - \hat{j}(x_1 z_2 - z_1 x_2) + \hat{k}(x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

PRODOTTO MISTO $\rightarrow \mathbb{R}^3$

$V_1 \cdot (V_2 \times V_3)$

SPAZIO VETTORIALE

Sia V un insieme: su V considero due operazioni, la "SOMMA" "+": $V \times V \to V$
$(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$ } BINARIA, INTERNA

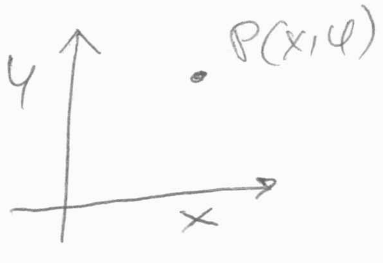
e la moltiplicazione per uno scalare
"$\cdot \alpha$": $\mathbb{R} \times V \to V$
$(\alpha, v) \to \alpha v$ } BINARIA

La somma deve essere:
- associativa
- commutativa
- $\exists$ elemento neutro
- $\exists$ l'opposto di ogni elemento

La moltiplicazione per uno scalare deve essere:
- associativa
- $\exists$ elemento neutro
- distributiva rispetto alla somma

La struttura algebrica che ne deriva è indicata con $(V; +; \cdot \alpha)$ ed è detta SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$

- Esempi 1) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$



$P_1 = (x_1, y_1)$
$P_2 = (x_2, y_2)$
$P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$\alpha \cdot P_1 = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

2) L'insieme dei vettori geometrici di $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale CON LE OPERAZIONI PRIMA INDICATE.

Esempi: 3) $V = M_{k \times n}$ matrici reali $k \times n$ con le operazioni di "somma TRA matrici" e "moltiplicazione per uno scalare" è spazio vettoriale

4) $V = \mathbb{R}[x]_n = \{$polinomi in una variabile di grado $n\}$ CON COEFFICIENTI IN $\mathbb{R}$

5) $\mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{$funzioni continue su $[a,b]\}$