3 ottobre 2012

SISTEMI LINEARI
di k equazioni in n incognite a coefficienti reali

$\mathbb{R}$ CAMPO $\Rightarrow$ $\overbrace{\text{somma}}^{\text{SONO DATE IN } \mathbb{R}}$ e moltiplicazione con proprietà DETERMINATE

$$\Sigma = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k \end{cases}$$

a_{ij} = scalari = ELEMENTI DEL CAMPO (IN QUESTO CASO NUMERI REALI)

Σ = INDICA IL SISTEMA

con a_{ij} si intende il coefficiente della j-esima incognita nella i-esima riga

L'obiettivo è risolvere il sistema mediante il metodo di ELIMINAZIONE DI GAUSS

RISOLVERE = trovare una soluzione cioè

$\Downarrow$

trovare UNA n-upla di numeri REALI, cioè DETERMINARE un valore PER ogni incognita, n IN TUTTO, CHE SOSTITUITI ALLE VARIABILI RENDONO OGNI EQUAZIONE UN'IDENTITÀ

1) DATO il sistema, $\exists$ la soluzione?: posticipiamo per ora la risposta

2) Come cercare la soluzione? Con il metodo di ELIMINAZIONE DI GAUSS: SI DETERMINANO SISTEMI EQUIVALENTI (CIOÈ CON LE STESSE SOLUZIONI) MEDIANTE OPERAZIONI SULLE EQUAZIONI

Lo adoperiamo su un esempio concreto:

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

sistema lineare non omogeneo di 3 incognite in 3 equazioni

I OPERAZIONE POSSIBILE

Moltiplicare tutti gli elementi per un determinato coefficiente di una sola equazione E SOSTITUIRE LA NUOVA EQUAZIONE ALLA PRECEDENTE

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{R_1' = 2R_1}$

R_i = riga i-esima

1ª operazione eseguita = MOLTIPLICAZIONE per 1 scalare $\neq 0$: <u>È UNA OPERAZIONE ELEMENTARE</u> RIGA

E SOSTITUZIONE DELLA NUOVA EQUAZIONE ALLA PRECEDENTE

ATTENZIONE: SE LO SCALARE fosse 0 annulleremmo l'equazione => il sistema non è equivalente a quello di partenza

II OPERAZIONE EFFETUABILE: SOSTITUZIONE DI UNA EQ. CON LA SUA SOMMA ALGEBRICA CON UN'ALTRA EQUAZIONE

$$\Rightarrow \begin{matrix} R_2'' = R_1' - R_2' \\ R_1'' = R_1' \\ R_3'' = R_3'' \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ \quad -2x_2 + 5x_3 = 17 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} R_1''' = R_1'' \\ R_2''' = R_2'' \\ R_3''' = 3R_1'' - 2R_3'' \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18 \\ \quad -2x_2 + x_3 = 17 \\ \quad -6x_2 + 16x_3 = 54 \end{cases}$$

<u>II OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA</u>:

⇓

sostituzione di 1 EQUAZIONE mediante COMBINAZIONE lineare di tale eq. = ~~operazione elementare riga~~ con un'altra equazione.

[COMBINAZIONE LINEARE DI EQUAZIONI = somma algebrica delle due eq. moltiplicate per degli scalari]

Abbiamo eliminato l'incognite x_1 in R_2''' e in R_3'''; ERA IN NOSTRO OBIETTIVO;

SEMPLIFICHIAMO LE EQUAZIONI:

$$\begin{matrix} R_1^{IV} = R_1'''/2 \\ R_3^{IV} = R_3'''/2 \\ R_2^{IV} = R_2''' \end{matrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ \quad -2x_2 + 5x_3 = 17 \\ \quad -3x_2 + 8x_3 = 27 \end{cases}$$

ORA CONSIDERIAMO LA SECONDA INCOGNITA x_2! PRENDIAMO IN CONSIDERAZIONE LA SECONDA EQUAZIONE (CHE CONTIENE x_2) E SOSTITUIAMO LE EQUAZIONI SUCCESSIVE NEL SISTEMA CON ALTRE IN CUI IN COEFFICIENTE DI x_2 È NULLO, OTTENUTE MEDIANTE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA.

$$R_1^{V} = R_1^{IV} \qquad R_2^{V} = R_2^{IV} \qquad \boxed{R_3^{V} = -3R_2^{IV} + 2R_3^{IV}} \Rightarrow \qquad \Sigma' = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ \quad -2x_2 + 5x_3 = 17 \\ \qquad\quad +x_3 = +3 \end{cases} \circledast$$

$$\Downarrow$$

IL SISTEMA ORA HA ASSUNTO LA *forma* A GRADINI

↓

conclusione della PARTE DISCENDENTE DEL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

PIVOT è il primo coefficiente non nullo nelle equazioni del sistema ridotto a gradini

In questo sistema abbiamo 3 PIVOT

Definizione: il numero dei PIVOT nella forma a gradini del sistema è detto RANGO del sistema.

Il sistema preso in esame ha rango 3.

ORA PROSEGUIAMO CON LA PARTE IN ASCESA ~~[illegible]~~ del metodo DI ELIMINAZIONE DI GAUSS. ~~[illegible]~~

Nell'Esempio dato:

$$\Sigma = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema di partenza}$$

DOPO AVER OTTENUTO LA FORMA A GRADINI $\Sigma' \circledast$, SI RIPARTE CONSIDERANDO L'ULTIMA VARIABILE CON UN PIVOT, IN QUESTO CASO x_3 NELLA TERZA EQUAZIONE, E SOSTITUENDO LE EQUAZIONI SOPRA QUELLA CONSIDERATA CON EQUAZIONI IN CUI SONO NULLI I COEFFICIENTI DELLA STESSA VARIABILE OTTENUTE MEDIANTE OPERAZIONI ELEM.

$$R_1^{VI} = R_1^{V} - R_3^{V} \qquad R_2^{VI} = 5R_3^{V} - R_2^{V} \qquad R_3^{VI} = R_3^{V} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ 2x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

(4)

$R_2^{VII} = R_2^{VI}/2$ $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

POI SI PROSEGUE NELLO STESSO MODO CON LA VARIABILE DEL PENULTIMO PIVOT

$R_1^{VIII} = R_1^{VII} - R_2^{VII}$ $\quad \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow$ Forma canonica A GRADINI

E COSÌ VIA FINO AD ARRIVARE ALLA FORMA A GRADINI CANONICA.

Il METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS viene utilizzato dai CALCOLATORI $\Rightarrow$ utilizza solo le operazioni di SOMMA e MOLTIPLICAZIONE

FORMA A GRADINI CANONICA: Forma finale del sistema: i coefficienti dei PIVOT sono uguali a 1; gli altri coefficienti sono uguali a 0, PER LE VARIABILI DEI PIVOT, NELLE EQUAZIONI CHE PRECEDONO E/O SEGUONO QUELLE DEI PIVOT.

Proposizione: I sistemi $\boxed{\Sigma \text{ e } \Sigma'}$ ottenuti l'uno dall'altro mediante operazioni elementari riga sono equivalenti, CIOÈ i 2 insiemi delle soluzioni coincidono ($Sol(\Sigma) = Sol(\Sigma')$)

Dimostrazione mediante la DOPPIA INCLUSIONE

$\Downarrow$

Dobbiamo dimostrare che $Sol(\Sigma) \subseteq Sol(\Sigma')$ e $Sol(\Sigma') \subseteq Sol(\Sigma)$

1) $Sol(\Sigma) \subseteq Sol(\Sigma')$

Sia $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \in Sol(\Sigma)$ possiamo supporre che Σ' sia ottenuto da Σ mediante solo una operazione elementare riga. (PERCHÈ IN OGNI CASO Σ' SARÀ OTTENUTO DA Σ MEDIANTE UN NUMERO FINITO DI OPERAZ. ELEMEN.)

1° caso) scambio di equazione

$A \in Sol(\Sigma) \Rightarrow$ posto $\Sigma = \begin{cases} R_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ R_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ R_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$

abbiamo

$$\begin{cases} R_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \\ R_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \end{cases}$$

scambio la i-esima eq. con la j-esima

$$\Downarrow$$

$$\Sigma = \begin{cases} R_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ R_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ R_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ R_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \Sigma' = \begin{cases} R_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ R_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ R_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ R_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

e quindi

$$\begin{cases} R_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_i(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \\ R_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow A \in \mathrm{Sol}(\Sigma')$$

2° CASO) SOSTITUZIONE DI UNA EQUAZIONE CON LA STESSA MOLTIPLICATA PER UNO SCALARE

(FARE PER ESERCIZIO)

3° CASO) SOSTITUZIONE DI UNA EQUAZIONE CON UNA SUA COMBINAZIONE LINEARE CON ALTRA EQUAZIONE

(FARE PER ESERCIZIO)

✪ ESISTE UNA TERZA OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA : LO SCAMBIO DI DUE EQUAZIONI.