10-10-2011 (1)

Esercizi:

$$\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=0 \\ x+y+kz=0 \end{cases}$$

È collocato in uno spazio tridimensionale, lavoriamo in $\mathbb{R}^3$

associamo al sistema la matrice:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \end{array}\right)_{3\times 4} \sim$$

ora risolviamo utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, trovando delle matrici equivalenti.

Suppongo $k \neq 0$ per poter continuare con il nostro metodo.

La nuova seconda riga R_2 la ottengo facendo $R_2 = R_1 - kR_2$

" TERZA " " R_3 " " $R_3 = R_1 - kR_3$

$$\sim \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1 \end{array}\right)}_{R_3 = R_2 - (1+k)R_3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & -k(1-k)(k+2) & -k \end{array}\right) \underset{\sim}{R_3 = R_3/_{-k}} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-k)(1+k) & 1-k & 1 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 1 \end{array}\right) \sim \circledast$$

impongo $1+k \neq 0$

~~$R_3 = R_2 - (1+k)R_3$~~

Se $k \neq 0; -1; +1; -2$ cioè $\forall k \in \mathbb{R} - \{0, \pm 1, -2\}$, $rg\, \Sigma = 3 \Rightarrow \Sigma$ ha $\infty^{3-3} = \underline{1 \text{ soluzione}} = \infty^0$

Ora ritorno all'inizio sostituendo a k i valori prima esclusi. Inizio con $k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\substack{R_1 = R_2 \\ R_2 = R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{R_3 = R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)_{R_3 = R_2 + R_3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

anche con $k=0$ abbiamo 3 pivot.

Per $k = 1$: POSSIAMO TORNARE ALLA MATRICE CHE NELLA CATENA DI EQUIVALENZE PRECEDE IL MOMENTO IN CUI ABBIAMO SUPPOSTO IL PARAMETRO DIVERSO DAL VALORE IN ESAME.

②

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

per $k = +1$ Σ non ha soluzioni

Per $k = -1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 = R_2 \\ R_2 = R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

per $k = -1$ sistema risolubile e abbiamo un'unica soluzione.

$k = -2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

il sistema non è risolubile per $k = -2$

$\forall k \in \mathbb{R} - \{+1, -2\}$ il sistema è risolubile e ha un'unica soluzione, mentre per $k = +1, -2$ il sistema non ha soluzione.

Continuiamo a risolvere il sistema. ✱ $\sim$ $R_2 = (k+2)R_2 - R_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-k^2)(k+2) & 0 & k+1 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 = (k+1)^{-1} R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1-k)(k+2) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & (1-k)(k+2) & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{R_2 = R_2/(1-k)(k+2) \\ R_3 = R_3/(1-k)(k+2)}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(-k+1)(k+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(-k+1)(k+2)} \end{array}\right) \underset{R_1 = R_1 - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 0 & 1 - \frac{1}{(1-k)(k+2)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(1-k)(k+2)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{(1-k)(k+2)} \end{array}\right) \sim$$

$(k \neq 1)$
$(k \neq -2)$

$$\sim \quad R_1 = R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} K & 0 & 0 & \frac{(1-k)(k+2)-2}{(1-k)(k+2)} \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k)(k+2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(1-k)(k+2) \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \quad R_1 = R_1 / K \quad (k \neq 0) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-(k+1)}{(1-k)(k+2)} \\ 0 & 1 & 0 & 1/(1-k)(k-2) \\ 0 & 0 & 1 & 1/(1-k)(k-2) \end{array}\right)$$

Riassociamo alla matrice il sistema:

$K \neq 0$

$K \neq -1$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-(k+1)}{(1-k)(k+2)} \\[2ex] y = \dfrac{1}{(1-k)(k+2)} \\[2ex] z = \dfrac{1}{(1-k)(k+2)} \end{cases}$$

Matrici: DEFINIAMO LA SEGUENTE OPERAZIONE:

Prodotto per uno scalare.

Data una matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots k \\ j=1,\dots h}} \in \mathcal{M}_{k \times h}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$ definiamo $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots k \\ j=1,\dots h}}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \lambda = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

VICEVERSA:

Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ posso raccogliere 3 dalle entrate $= 3\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 \\ 2 & 2/3 & 3 \end{pmatrix}$

STUDIAMO ORA LA SEGUENTE OPERAZIONE TRA MATRICI:

Prodotto fra matrici: DETTO ANCHE:

Prodotto riga per colonna

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = C$$

$c_{11} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1$

$c_{12} = 1(-1) + 2 \cdot 2$

$c_{21} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1$

$c_{22} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

PER DETERMINARE L'ENTRATA c_{ij} DELLA MATRICE PRODOTTO $C = AB$ SI SOMMANO I PRODOTTI DEGLI ELEMENTI DELLA i-ESIMA RIGA DI A PER GLI ELEMENTI CORRISPONDENTI DELLA j-ESIMA COLONNA DI B

$$c_{11} = (a_{11} \; a_{12})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$$

$$c_{11} = (a_{11} \; a_{12} \; a_{13})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$$ non è possibile eseguire il prodotto in questo caso.

Il prodotto riga per colonna tra matrici può essere fatto solo se la lunghezza delle righe della prima matrice è pari alla lunghezza delle colonne della seconda matrice, cioè se il numero di colonne della prima matrice è pari al numero di righe della seconda.

$$A_{k \times n} \cdot B_{n \times h} = C_{k \times h} \quad \text{dove } C = \left(c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}\right)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,h}}$$

VEDERE NELL'INSIEME DELLE MATRICI $m \times m$ SE IL PRODOTTO GODE DELLE PROPRIETÀ ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA; ESISTE L'ELEMENTO NEUTRO