GEOMETRIA 3-10-2011

LE MATRICI

Indichiamo una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}_{k \times n}$$

N.B.

Nei pedici degli elementi generici si indica la riga ~~di~~ appartenenza con il primo numero e la colonna con il secondo (gli elementi si chiamano "entrate")

in questo modo: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$, $a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i,j$

Ad esempio:

$A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

Indica che le entrate della matrice appartengono ad $\mathbb{R}$

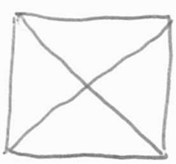
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Quando il numero di righe é diverso da quello delle colonne la matrice ē detta "rettangolare", in caso contrario ē detta "quadrata", in riferimento all'idea geometrica che richiamano.

Def. $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ ē detta "rettangolare" se $k \neq n$

$A \in \mathcal{M}_{k\times n}$ ē detta "QUADRATA" se $k = n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$



Def.: Si dice "diagonale principale" di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ l'insieme $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots a_{nn}\} = \{a_{ij}\}_{i=j}$

Def: Si dice "diagonale secondaria" di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ l'insieme $\{a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \dots, a_{n1}\} = \{a_{ij}\}_{i+j=n+1}$

Def.: Una matrice quadrata $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é detta "triangolare superiore" se ogni entrata ~~...~~ al di sotto" della diagonale principale é nulla ~~...~~ cioé se: $a_{ij}=0 \quad \forall\, i>j$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Def.: $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, ~~...~~ $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é detta "triangolare inferiore" se $a_{ij}=0 \ \forall\, i<j$

ESEMPIO

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $A=(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ é detta "diagonale" se $a_{ij}=0 \ \forall\, i\neq j$

N.B. la matrice nulla VERIFICA tutte le condizioni precendenti, quindi é di ~~...~~ tutti e tre i ~~...~~ tipi contemporaneamente

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é detta "simmetrica" se

$$a_{ij}=a_{ji} \quad \forall\, i,j$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ simmetria rispetto alla diagonale ~~...~~ principale

OPERAZIONI CON LE MATRICI

Data $A \in \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}$ definiamo "trasposta" di A

la matrice A^T (${}^T\!A$, A^t, ${}^t\!A$, A_t ...), $A^T \in \mathcal{M}_{n\times k}$ così definita

$$A^T=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}} \quad \text{tale che } b_{ij}=a_{ji} \quad \forall i,j$$

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}_{3\times 2} \Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}_{2\times 3}$$

~~Proprietà~~ PROPRIETÀ: $(A^T)^T=A$

La trasposta della trasposta di A è A stessa

PROPOSIZIONE: $A\in\mathcal{M}_{n\times n}$ è simmetrica $\Longleftrightarrow A^T=A$

ALTRE OPERAZIONI TRA MATRICI

Definiamo la somma di matrici in $\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$.

La somma (di matrici) è in realtà un'applicazione ~~[illegible]~~

$$+ : \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$$

$$(A,B) \longmapsto A+B$$

così definita: se $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}$ e $B=(b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,n}}$

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k\\ j=1,\dots,m}}$$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

Tutto ciò é possibile perché in $\mathbb{R}$ é definita un'operazione di "somma" o "addizione"

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$

tale operazione gode delle proprietá

1) associativa: $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

2) $\exists$ elemento neutro e $(e=0)$: $a = a+e = e+a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

3) $\exists$ dell'opposto: $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists b \in \mathbb{R} \mid a+b = b+a = 0$
Tale $b = -a$

4) Commutativa: $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

N.B.: Definendo ~~quest~~ un'operazione, ~~abbiamo dotato~~ dotiamo l'insieme di una struttura algebrica che consente di "LAVORARE" CON GLI ~~operazioni~~ ELEMENTI DELL'INSIEME

In generale, se su un'insieme A dó un'operazione ~~binaria interna~~ "$*$" binaria 1), interna 2) che verifica le proprietá 1), 2), 3), allora la struttura algebrica $(A;*)$ é detta "GRUPPO".

(1) **BINARIA**: AGISCE SU COPPIE ORDINATE; 2) **INTERNA**: IL CODOMINIO È L'INSIEME STESSO)

Se vale anche la 4) il gruppo é detto "COMMUTATIVO" o "ABELIANO"

Se definiamo il "prodotto di numeri reali" come un'applicazione (funzione) $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longrightarrow x \cdot y$, si vede che tale operazione su $\mathbb{R}$ verifica 1), 2), 3), 4) (con le dovute modifiche di scrittura) e quindi $(\mathbb{R}, \cdot)$ é un gruppo abeliano

(PER LA 3) PARLIAMO DELL'ESISTENZA DEL RECIPROCO $\forall$ ELEMENTO $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$)

4

Considero la struttura $(\mathcal{A}; +, \cdot)$, imponendo che $(\mathcal{A}, +)$ sia un gruppo abeliano ed il prodotto verifichi la proprietá associativá e la proprietá "distributiva" del prodotto rispetto la somma (cioé: $x \cdot (y+z) = xy + xz \quad \forall x, y, z \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ allora $(\mathcal{A}; +, \cdot)$ é detta ANELLO

Se in piu' esiste l'elemento neutro ~~detto~~ del prodotto $\Rightarrow (\mathcal{A}; +, \cdot)$ é ANELLO CON UNITÁ

Se in piu' il prodotto é commutativo $\Rightarrow (\mathcal{A}; +, \cdot)$ é ANELLO COMMUTATIVO (con unitá)

Se in piu' $\forall$ elemento di $\mathcal{A} - \{0\}$, esiste il reciproco allora $(\mathcal{A}; +, \cdot)$ é detto CAMPO.

ESERCIZIO

Studiare le strutture algebriche: $(\mathbb{N}; +)$ $(\mathbb{N}; +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}; +)$ $(\mathbb{N}; \cdot)$ $(\mathbb{Z}; \cdot)$ $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ $(\mathbb{Q}, +)$ $(\mathbb{Q}; \cdot)$ $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ $(\mathbb{R}; +)$ $(\mathbb{R}; \cdot)$ $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ $(\mathcal{M}_{k \times n}; +)$