GEOMETRIA

26/9/2011

→ Ambiente di lavoro: SPAZIO n-DIMENSIONALE, $n \in \mathbb{N}$

1ª PARTE: ALGEBRA LINEARE

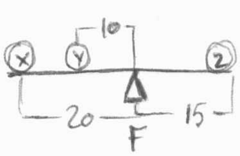
- Polinomi
- Equazioni di 1° grado
- Sistemi di equazioni lineari in n incognite

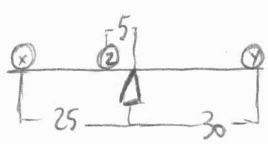
} RIVEDERE LE NOZIONI DI MONOMIO POLINOMIO; GRADO DI UN POLINOMIO EQUAZIONE; SOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE; RIVEDERE LE PROPRIETÀ RELATIVE.

Grado di un sistema → prodotto dei gradi delle singole equazioni

Simbologia:
- i, j, k; m, n, o, p, q, r → rappresentano numeri naturali o interi
- x, y → numeri reali
- z, w → numeri complessi

ESEMPIO DI SISTEMA LINEARE





$$\begin{cases} 20x + 10y = 30 \\ 25x + 10 = 30y \end{cases}$$

In forma generale, variabili e coefficienti vengono ~~un~~ ~~tali~~ ~~ex~~ identificati da una lettera e un indice numerico:

VARIABILI → $x_1, x_2, \dots, x_n$

COEFFICIENTI → $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ dove il 1° indice indica a quale equazione appartiene il coefficiente, mentre il 2° indice indica a quale variabile si riferisce il coefficiente

$b_1, b_2, \dots, b_p$: questa lettera b_p rappresenta il termine noto della p-esima equazione

Un sistema generico viene identificato dalla lettera greca Σ (sigma).

Un sistema del tipo:

$$\Sigma \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

può essere riscritto in forma più compatta col simbolo di sommatoria:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j = b_p \end{cases}$$

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS

Partendo dalla prima equazione di un sistema si elimina una DETERMINATA variabile dalle equazioni successive, dunque si riscrive un nuovo sistema nel quale tale variabile compaia solamente nella prima equazione. LE NUOVE EQUAZIONI SONO OTTENUTE DALLE PRECEDENTI MEDIANTE LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA RIPORTATE SOTTO:

$$\Sigma \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 \cancel{+} - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \sim \quad \begin{matrix} 2R_1 - R_2 = R_2' \\ R_1 + R_3 = R_3' \end{matrix} \quad \Sigma' \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_2 - 5x_3 = 3 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Proposizione: l'insieme delle soluzioni del primo sistema $(Sol\,\Sigma)$ coincide con l'insieme delle soluzioni del secondo sistema $(Sol\,\Sigma')$

in simboli: $Sol(\Sigma) = Sol(\Sigma')$

OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA

1. Scambio di posto di un'equazione
2. Moltiplicazione di un'equazione per uno scalare $\neq 0$

~~③ Somma algebrica di due equazioni~~

3. Sostituzione di un'equazione con la somma algebrica della stessa e di un'altra equazione

Ad eccezione della negazione di una proposizione ~~[illegible]~~, che si compie fornendo un controesempio specifico, le dimostrazioni vanno svolte nel modo più generale possibile, USANDO LETTERE AL POSTO DI NUMERI SPECIFICI.

$\boxed{\text{DIM}}$ DELLA PROPOSIZIONE

① $Sol(\Sigma) \subseteq Sol(\Sigma')$, ossia DATA L'UNA soluzione α di $\Sigma \Rightarrow \alpha$ è soluzione di Σ': $\forall\, \alpha \in Sol(\Sigma) \Rightarrow \alpha \in Sol(\Sigma')$

dove α è un qualunque elemento dell'insieme $Sol(\Sigma)$

- Quantificatore universale
  $\forall$: per ogni
- Quantificatore esistenziale
  $\exists$: esiste

Bisogna ~~verificare~~ dimostrare che le operazioni elementari riga non modificano le soluzioni del sistema di partenza.

→ lo scambio di equazioni non modifica il sistema

→ Moltiplicazione: si moltiplica per $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, la i-esima equazione R_i ($i \in \{1, 2, \dots, p\}$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i = 0$$

$$\alpha \in Sol(R_i),\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j - b_i = 0 \Rightarrow \text{POSTO } b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$$

$$\Rightarrow b\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j - b_i\right) \overset{?}{=} 0 \quad \text{Sì} \quad \Rightarrow \alpha \in Sol(bR_i) \Rightarrow \alpha \in Sol(\Sigma')$$