21/12/2011

Esempio di applicazione tra gruppi additivi $(\mathbb{R},+)$

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2+4x-3$$ è un MORFISMO di gruppi additivi?

Vediamo se: $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$

$$f(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2 + 4(x_1+x_2) - 3 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 3$$

$$f(x_1)+f(x_2) = x_1^2 + 4x_1 - 3 + x_2^2 + 4x_2 - 3$$

$\Rightarrow f(x_1+x_2) \neq f(x_1)+f(x_2) \Rightarrow$ Questa funzione reale non è un morfismo di gruppi additivi

Consideriamo gli <u>anelli</u> $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$ e $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$ e l'applicazione:

$$\varphi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$n \longmapsto \frac{n}{1}$$

φ è un isomorfismo? cioè
- (1) φ è un morfismo di anelli?
- (2) φ è biettiva?

(1) Dobbiamo far vedere che:

- $\varphi(n_1+n_2) = \varphi(n_1)+\varphi(n_2) \Rightarrow \dfrac{n_1+n_2}{1} = \dfrac{n_1}{1} + \dfrac{n_2}{1}$ SI
- $\varphi(n_1 \cdot n_2) = \varphi(n_1)\cdot\varphi(n_2) \Rightarrow \dfrac{n_1 \cdot n_2}{1} = \dfrac{n_1}{1} \cdot \dfrac{n_2}{1}$ SI

$\Rightarrow$ È un morfismo di anelli

② Dobbiamo verificare che:

- φ sia iniettiva.

Se $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \Rightarrow \frac{n_1}{1} = \frac{n_2}{1} \Rightarrow n_1 = n_2$ (per la definizione di numeri frazionari)
$\Rightarrow \varphi$ è iniettiva

- φ sia suriettiva.

$\operatorname{Im}\varphi \equiv \mathbb{Q}$? No perchè ad esempio l'elemento $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ ma $\nexists\, n \in \mathbb{Z}$ tale che $\frac{n}{1} = \frac{2}{3}$

φ non è suriettiva, ma se ~~pongo~~ cambio il codominio con $\operatorname{Im}\varphi$

$$\Rightarrow \tilde{\varphi} : \mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Im}\varphi = \left\{ \frac{n}{1} \text{ con } n \in \mathbb{Z} \right\} \text{ è suriettiva}$$

$$n \longmapsto \frac{n}{1}$$

$\Rightarrow \tilde{\varphi}$ è un isomorfismo.

CONSIDERIAMO ORA VARI TIPI DI RELAZIONE TRA ELEMENTI DI UN INSIEME.

[~~Per esercizio provare che $(n_1, m_1) \sim (n_2, m_2) \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 m_1$ è una relazione di equivalenza con $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{Z}$~~]

ESEMPIO:

Consideriamo $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ (n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z} \}$. IN $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ DIAMO LA SEGUENTE RELAZIONE R TRA LE COPPIE ORDINATE (n_1, m_1) E (n_2, m_2): ESSE SONO IN RELAZIONE TRA LORO ~~$(n_1, m_1) R (n_2, m_2) \Leftrightarrow$~~, CIOE'

$$(n_1, m_1)\, R\, (n_2, m_2) \Longleftrightarrow n_1 \cdot m_2 = n_2 \cdot m_1$$

Se ciò è verificato allora gli elementi $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sono in relazione tra di loro E SI VERIFICA CHE TALE RELAZIONE E' DI EQUIVALENZA:

21/12/2011

UNA RELAZIONE FRA ELEMENTI DI UN INSIEME $\mathcal{A}$ È UNA **RELAZIONE DI EQUIVALENZA** se

Valgono le seguenti proprietà:

1) RIFLESSIVA: data la relazione d'equivalenza R $\Rightarrow$ R È RIFLESSIVA $\Leftrightarrow$ $xRx \quad \forall x \in \mathcal{A}$
(CIOÈ SE OGNI ELEMENTO È IN RELAZIONE CON SE STESSO)

2) SIMMETRICA: se $xRy \Rightarrow yRx \quad \forall x,y \in \mathcal{A}$
(CIOÈ SE X È IN RELAZIONE CON Y $\Rightarrow$ Y È IN RELAZIONE CON X)

3) TRANSITIVA: se xRy e $yRz \Rightarrow xRz \quad \forall x,y,z \in \mathcal{A}$

UN ALTRO TIPO DI RELAZIONE TRA ELEMENTI DI UN INSIEME $\mathcal{A}$ È LA **RELAZIONE D'ORDINE**:

Esempio DI RELAZIONE D'ORDINE R TRA ELEMENTI $x,y \in \mathcal{A}$: $xRy \Leftrightarrow x \leq y$

UNA RELAZIONE TRA ELEMENTI DI UN INSIEME È D'ORDINE SE Valgono le seguenti proprietà:

1) Riflessiva

2) Transitiva

3) Antisimmetrica se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$

Se ~~quando~~ riesco a stabilire sempre quando un elemento è minore di un altro si parla allora di relazione d'ordine totale.

Se in un campo vige una relazione d'ordine totale $\Rightarrow$ si dice che tale campo è TOTALMENTE ORDINATO: $\mathbb{Q}$ ED $\mathbb{R}$ SONO TOTALMENTE ORDINATI

DATA UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA, L'INSIEME DEGLI ELEMENTI IN RELAZIONE TRA LORO È DETTA CLASSE DI EQUIVALENZA: UN ELEMENTO QUALUNQUE DI TALE CLASSE È UN SUO RAPPRESENTANTE

$\mathbb{Q}$ non è altro che un insieme di classi di equivalenza RELATIVAMENTE ALLA RELAZIONE SU $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: $(n_1, m_1) R (n_2, m_2) \Leftrightarrow n_1 m_2 = n_2 \cdot m_1$
(classe di equivalenza è a sua volta un insieme di elementi in relazione d'equivalenza tra di loro) INDICHIAMO CON

$\overline{(n,m)}$ o $[(n,m)]$ = classe di equivalenza di (n,m) secondo R

foglio 2

COSÌ AD ESEMPIO $[(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (-3,-6), (3,6), (4,8), (5,10) \ldots\}$

INDICHIAMO CON $\frac{1}{2}$ la classe di equivalenza $[(1,2)]$. DOBBIAMO tenere conto che $(1,2)$ è solo uno degli infiniti elementi di tale classe, rappresentata appunto da $\frac{1}{2}$, ma potrei anche decidere di rappresentare tale classe con: $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8} \ldots$

SCEGLIENDO COME RAPPRESENTANTI DELLA CLASSE $(2,4)$ OPPURE $(3,6)$ OPPURE $(4,8)$ E COSÌ VIA.
TALI CLASSI DI EQUIVALENZA SONO GLI ELEMENTI DELL'INSIEME $\mathbb{Q}$.

Sono chiamati APPLICAZIONI LINEARI, ~~omomorfismi~~ I MORFISMI TRA SPAZI VETTORIALI

DEFINIZIONE:

$L: V \to W$, con V, W spazi vettoriali, è un'applicazione lineare se valgono le seguenti proprietà:

1) $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

2) $L(\alpha v) = \alpha L(v) \quad \forall v \in V$ e $\alpha \in K$

Esempi:

1) Consideriamo: $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x$ ~~[illegible]~~ è un'applicazione lineare?

Vediamo se valgono le proprietà di un'applicazione lineare:

① $L(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2)$ e $L(x_1) + L(x_2) = 2x_1 + 2x_2$ SI per la proprietà distributiva tra numeri reali

② $L(\alpha x) = 2(\alpha x)$ e $\alpha L(x) = \alpha(2x)$ SI Per la proprietà ~~[illegible]~~ commutativa in $\mathbb{R}$

2) $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 1$ è lineare?

① $L(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 - 1$

$L(x_1) + L(x_2) = x_1^2 - 1 + x_2^2 - 1$

$\Rightarrow$ Sono diversi per cui L non è un'applicazione lineare.

21/12/2011

Le proprietà 1) e 2) si possono riunire in un'unica proprietà:

2') $L(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2) = \alpha_1 L(V_1) + \alpha_2 L(V_2)$

Esercizio per casa:

$L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longmapsto (x^2, 2y)$ è lineare?

DEFINIZIONE: Data un'applicazione lineare $L : V \to W$, chiamiamo ~~nucleo~~ NUCLEO di L (o KERNEL di L), $\text{Ker}\, L = \{ v \in V \mid L(v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore nullo}}}{0} \}$

In pratica $\text{Ker}\, L = L^{-1}(0)$, dove $L^{-1}(0)$ è la controimmagine del vettore nullo.

Esercizio per casa:

Dimostrare che $\text{Ker}\, L$ è un sottospazio vettoriale di V, qualsiasi sia L applicazione lineare.

Data $L : V \to W$, $\text{Im}\, L = \{ w \in W$ per i quali $v \in V \mid L(v) = w \}$

Esercizio per casa:

Dimostrare che se L è app. lineare, $\text{Im}\, L$ è sottospazio vettoriale di W.

PROPOSIZIONE:

Sia $L: V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali

$\Rightarrow$ 1) $L(0) = 0$

2) $L(-v) = -L(v)$

3) L è iniettiva $\Longleftrightarrow$ il nucleo $\operatorname{Ker} L = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE (esercizio per casa)