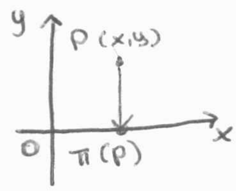
Sia $T: V \longrightarrow V$ operatore, V spazio vettoriale n-dimensionale: diamo la

__definizione__: Un sottospazio $W < V$ è detto __INVARIANTE__ per T se $\forall w \in W$, $T(w) \in W$.

Esempio: 1) $id: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ogni sottospazio (rette per l'origine, piani per l'origine, ecc.) di $\mathbb{R}^n$ è invariante

2) $\pi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (x,0)$



POICHE' SE T E' LINEARE l'origine è sempre invariante (è banale)
$T(0) = 0$

Anche lo spazio ambiente su cui lavoriamo è sempre invariante (nell'es. è $\mathbb{R}^2$) PERCHE' $T(V) \subseteq V$ (ANCHE QUESTO SOTTOSPAZIO INVARIANTE E' BANALE.

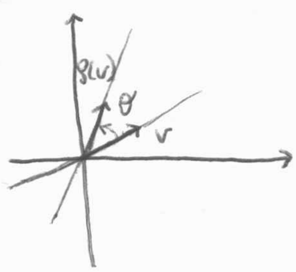
vediamo se ci sono nell'es. SOTTOSPAZI invarianti non banali CIOE' SOTTOSPAZI INVARIANTI DIVERSI DAL VETTORE NULLO E DALLO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$.

l'asse x $(y=0)$ è un sottospazio invariante per π

l'asse y $(x=0)$ è un sottospazio invariante per π (viene schiacciato sull'origine CHE APPARTIENE AL SOTTOSPAZIO $X=0$)

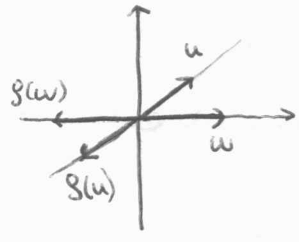
3) rotazione di angolo θ con $0 < \theta < \pi$:
$\rho: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

oltre agli invarianti banali ci sono altri sottospazi invarianti? No



(se $\theta = 0$ ricadiamo nell'identità)

3') se $\theta = \pi$



tutte le rette per l'origine sono sottospazi invarianti se $\theta = \pi$

__OSS__: Dato $T: V \longrightarrow V$ operatore, il vettore nullo e lo spazio V sono sempre sottospazi invarianti per T: essi sono sottospazi invarianti __banali__.

$\Rightarrow$

Dato $T: V \to V$ operatore, considero quei vettori $v \in V$ per i quali $\exists$ un numero reale λ tale che $T(v) = \lambda v$ ed inoltre $v \neq 0$.

Tali vettori sono detti <u>AUTOVETTORI</u> di T, lo scalare λ è detto <u>AUTOVALORE</u> di T e l'insieme degli autovettori relativi ad un determinato autovalore λ $\cup \{0\}$ è detto AUTOSPAZIO di T relativo all'autovalore λ e sarà indicato con E_λ

<u>Proposizione</u>: E_λ è un sottospazio vettoriale di V

<u>Dimostrazione</u>: il vettore nullo di V abbiamo già imposto che facesse parte di E_λ

siano $v_1, v_2 \in E_\lambda \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in E_\lambda$

se $v_1 \in E_\lambda \Rightarrow T(v_1) = \lambda v_1$ e $v_2 \in E_\lambda \Rightarrow T(v_2) = \lambda v_2$ (per Hp)

$\Rightarrow T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \lambda v_1 + \alpha_2 \lambda v_2 =$
$= \lambda(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$

<u>OSS</u>: Gli autospazi sono sottospazi invarianti, ma non tutti i sottospazi invarianti sono autospazi.

(ad es. in $id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ogni sottospazio di $\mathbb{R}^n$ è invariante, ma l'unico autospazio è lo spazio ambiente ed è un autospazio relativo a $\lambda = 1$)

- riprendiamo $\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$(x,y) \mapsto (x,0)$

$\pi(x,0) = (x,0) \Rightarrow$ se $v \in$ asse x $\Rightarrow \pi(v) = v \Rightarrow \lambda = 1$ (E_1)

se $v \in$ asse y $\Rightarrow \pi(w) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ (E_0)

- la rotazione non ha autospazi
- nella rotazione di $\theta = \pi$ $\rho_\pi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\rho_\pi(v) = -v, \forall v \Rightarrow \lambda = -1$ E $\mathbb{R}^2$ è l'autospazio E_{-1} relativo a $\lambda = -1$

<u>VEDIAMO</u>

Come determinare praticamente autovalori, autovettori, autospazi di un operatore $T: V \to V$

cerco i vettori $\overset{v \neq 0}{v \in V} / T(v) = \lambda v$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow T(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow T(v) - \lambda id(v) = 0 \Rightarrow (T - \lambda id)(v) = 0$ (somma algebrica di applicazioni)

$\Rightarrow$ cerco i vettori $v \neq 0$, che appartengono a $\ker(T - \lambda id)$ e (vedo quando tale applicazione non è iniettiva) voglio che tale nucleo sia $\neq \{0\}$, cioè cerco quei $\lambda \in \mathbb{R} / T - \lambda id$ non è iniettiva.

$\Rightarrow$

Fissata una base B in V associo una matrice all'operatore : $[T-\lambda id]_B =$
$= [T]_B - \lambda[id]_B = [T]_B - \lambda I$: voglio che il rango della matrice:
$rg([T]_B - \lambda I)$ non sia massimo (poiché sarebbe $\dim Im = \dim V$ e per il teo. delle dimensioni $\dim Ker = 0$ se il rango fosse massimo)
imponiamo quindi $\det([T]_B - \lambda I) = 0$: il determinante da trovare è il polinomio caratteristico della matrice $[T]_B$ e dunque le sue radici caratteristiche sono gli autovalori di T.
~~poi sost. il valore di λ trovato in $(T-\lambda id)(v)=0$ per trovare il nucleo.~~
Determinati gli autovalori vanno sostituiti al parametro λ in $T-\lambda id$ singolarmente e si determina il $Ker(T-\lambda id)$ cioè l'autospazio E_λ che sarà dunque lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato alla matrice $[T]_B - \lambda I$.

Esempio 1) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x,0)$ prendiamo la base canonica

$$[T]_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_e - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) \Rightarrow$ le sue radici caratteristiche sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità 1 $(\mu(1) = 1)$
e $\lambda_2 = 0$ con $\mu(0) = 1$

$\Rightarrow$ gli autovalori reali di π sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$

E_1: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{y=0}$: asse x

E_0: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x=0}$: asse y

Esempio 2) $\rho_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $[\rho_\theta]_e = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sen\theta \\ \sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sen\theta \\ \sen\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sen^2\theta = \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \sen^2\theta =$

$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$ $\cos^2\theta - 1 < 0$

$\Rightarrow$ non abbiamo soluzioni reali $\Rightarrow$ non ci sono autovalori
$\Rightarrow$ non ci sono autospazi.

$\Rightarrow$

<u>Esercizio</u>: $\dim E_\lambda \geq 1$ dove λ è autovalore di $T: V \to V$, con $\dim V = n$;

INOLTRE $\dim E_\lambda \leq n$ ESSENDO E_λ UN SOTTOSPAZIO DI V

(anche la molteplicità dell'autovalore sarà compresa tra 1 e n).