Sia $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy$ forma quadratica

definiamo la polare F_Q :

$$F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$$

ricaviamo la sua espressione analitica: CONSIDERATA LA BASE CANONICA $\mathcal{E}$ DI $\mathbb{R}^2$,
POSTO $[v]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $[w]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow [v+w]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+t \end{pmatrix} \Rightarrow F_Q\left(\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}\right)\right) =$

$$= \frac{(x+z)(y+t) - xy - zt}{2} = \frac{xt+zy}{2}$$

troviamo la matrice associata ad F_Q nella base canonica :

$$[F_Q]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F_Q((e_1,e_1)) & F_Q((e_1,e_2)) \\ F_Q((e_2,e_1)) & F_Q((e_2,e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = [Q]_{\mathcal{E}}$$

quando la base è canonica possiamo trovare la matrice in questo modo

$$\begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & a_{11} & a_{12} \\ y & a_{21} & a_{22} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

a_{11} è data dal coefficiente di x^2
a_{22} è data dal coefficiente di y^2
a_{12} è data dal coefficiente di xy diviso per due (perché termine misto)
a_{21} " " " " "

ESERCIZIO
Data $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$ trovare $[Q]_B$

Data una forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to \mathbb{R} \Rightarrow$ fissata una base B_V
sappiamo che posto $[v]_B = X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $[w]_B = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow F((X,Y)) = X^T [F]_B Y$.
Possiamo definire $Q : V \to \mathbb{R}$ come $Q(v) = F((v,v)) \Rightarrow \boxed{Q(X) = F((X,X)) =}$
$\boxed{= X^T [Q]_B X}$

Supponiamo che la forma bilineare simmetrica reale $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sia definita positiva $\Rightarrow F$ non ha vettori isotropi (perché $F((v,v)) > 0 \; \forall v \neq 0$) non nulli
$\Rightarrow$ possiamo dare una base ~~dello spazio~~ F-ortonormale, dello spazio $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$
$\Rightarrow [F]_{B_{\perp n}} = I \Rightarrow F((X,Y)) = X^T I Y$ dove $X = [v]_{B_{\perp n}}$ $Y = [w]_{B_{\perp n}}$

$\Rightarrow F((X,Y)) = X^T Y = \left(\text{supponendo } X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \text{ e } Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}\right) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$

abbiamo quindi ottenuto il prodotto scalare standard ~~[illegible]~~: una forma bilineare simmetrica DEFINITA POSITIVA F espressa in una base F-ortonormale

$Q(X) = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = \|X\|^2 = |X|^2$

abbiamo ottenuto la norma (modulo) di un vettore: ~~[illegible]~~ IMMAGINE DI UN VETTORE TRAMITE la forma quadratica Q, derivata dalla particolare forma F.

Una forma quadratica $Q: V \to \mathbb{R}$ si dice DEFINITA POSITIVA se $Q(v)>0 \ \forall v\neq 0$,
DEFINITA NEGATIVA se $Q(v)<0 \ \forall v \neq 0$,
SEMIDEFINITA POSITIVA se $Q(v)\geq 0 \ \forall v\in V$,
SEMIDEFINITA NEGATIVA se $Q(v)\leq 0 \ \forall v \in V$,
INDEFINITA altrimenti.

Se in uno spazio vettoriale V é data una base F-ortogonale con $F: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica $\Rightarrow [F]_{B_\perp}$ é diagonale. Basi ortogonali diverse determinano matrici diagonali diverse che hanno lo stesso rango; un ulteriore elemento invariante per tali matrici é il <u>numero di termini positivi</u> sulla diagonale e di conseguenza anche il numero di elementi negativi. Tali numeri sono allora invarianti anche per la forma quadratica (associata ad F); il numero di termini positivi, p, é detto NUMERO DI INERZIA POSITIVO ed il numero di termini negativi, q, é detto NUMERO DI INERZIA NEGATIVO (NUMERO oppure INDICE). La coppia (p,q) é detta SEGNATURA della forma quadratica Q

<u>TEOREMA</u> (di Sylvester o legge d'inerzia per le forme quadratiche):

Data una forma quadratica <u>reale</u> $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ base B dello spazio $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$[Q]_{B} = \begin{array}{c} \\ p \\ r=p+q \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (B \text{ é ortonormale PER } F_Q)$$

I numeri p e q (il numero di elementi positivi e negativi sulla diagonale) sono invarianti, cioé non variano al cambiare della base ortonormale

Dimostrazione Sia $B_\perp$ una base di $\mathbb{R}^n$ tale che $[Q]_{B_\perp}$ é diagonale e (riordinando, se serve, i vettori della base) possiamo scrivere:

$$[Q]_{B_\perp} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \alpha_p & & & & & \\ & & & \beta_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \beta_q & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha_j > 0 \ \forall j = 1, \dots, p \text{ e } \beta_i < 0 \ \forall i = 1, \dots, q$$

Sia $B_\perp = \{ v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q, u_1, \dots u_{n-r} \}$ $(r = p+q)$

Sia $a_j = \sqrt{\alpha_j}$ $\forall j = 1, \dots, p$ e $b_i = \sqrt{-\beta_i}$ $\forall i = 1, \dots, q$

$\Rightarrow$ sia $B = \left\{ \frac{v_1}{a_1}, \dots, \frac{v_p}{a_p}, \frac{w_1}{b_1}, \dots, \frac{w_q}{b_q}, u_1, \dots, u_{n-r} \right\} \Rightarrow$ la base B é F_Q-ortonormale

$$[Q]_B = \begin{pmatrix} F_Q\left(\left(\frac{v_1}{a_1}, \frac{v_1}{a_1}\right)\right) & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$F_Q\left(\left(\frac{v_j}{a_j}, \frac{v_j}{a_j}\right)\right) = \frac{1}{a_j^2} F_Q((v_j, v_j)) = \frac{1}{a_j^2} \alpha_j = 1 \quad \forall j = 1, \dots, p$$

$$F_Q\left(\left(\frac{w_i}{b_i}, \frac{w_i}{b_i}\right)\right) = \frac{1}{b_i^2} F_Q((w_i, w_i)) = \frac{1}{-\beta_i} \beta_i = -1$$

$\forall i = 1, \dots, q$

$F_Q((u_k, u_k)) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, n-r$

Supponiamo ora che esista una base $\tilde{B}$ dello spazio tale che $[Q]_{\tilde{B}} =$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ t \\ \\ r \\ \\ \end{array}$$

con $t \neq p$. Supponiamo $t < p \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto $B = \{ v_1', \dots, v_p', w_1', \dots, w_q', u_1, \dots, u_{n-r} \}$ e $\tilde{B} = \{ \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_t, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{r-t}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-r} \}$

considero $U < V$: $U = \langle v_1', \dots, v_p' \rangle$ e $\tilde{U} = \langle \tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_{r-t}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{n-r} \rangle$

$\dim U + \dim \tilde{U} = p + n - t > n$ essendo $p - t > 0 \Rightarrow U \cap \tilde{U} \neq \{0\}$

$\Rightarrow$ considero $v \in U \cap \tilde{U}$, $Q(v) > 0$ se considero $v \in U$ mentre $Q(v) < 0$ se considero $v \in \tilde{U}$ $\Rightarrow$ é assurdo $\Rightarrow$ t NON é minore di p

Supponiamo $t > p \Rightarrow$ con lo stesso ragionamento si arriva di nuovo ad un assurdo $\Rightarrow \boxed{t = p}$