Nota 52 Con il simbolismo appena introdotto la formula data nel teorema 48 diventa

$$|\bigcup_{i=1}^{3} A_i| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{i,j,i<j} |A_i \cap A_j| + |\bigcap_{i=1}^{3} A_i|$$

dove la sommatoria nel secondo addendo significa sommatoria su i e j compresi tra 1 e 3 con la condizione $i < j$.

Nota 53 La formula appena data può essere generalizzata al caso di n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} |\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}|$$

1.4 Relazioni su un insieme

Definizione 54 Dati due insiemi A e B, indichiamo con $A \times B$ l'insieme formato dalle coppie ordinate (a, b), con $a \in A,\ b \in B$. Cioè:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

L'insieme $A \times B$ viene chiamato **prodotto cartesiano** degli insiemi A e B. Più in generale, dati n insiemi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ poniamo:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Dato poi un insieme A e un intero positivo n poniamo:

$$A^n = A \times A \times \cdots \times A \quad (n \text{ volte})$$

Esempio 55 Dati gli insiemi $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, si ha:
$A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$.

Definizione 56 Dato un insieme A, sia B un sottoinsieme di $A \times A$. L'insieme B è quindi dato da coppie di elementi (a, a') di A. Introduciamo in A una **relazione binaria** ponendo che un elemento a è in relazione con un elemento a' se e solo se $(a, a') \in B$. Se a è in relazione con a' scriviamo aRa'. Quindi abbiamo:

$$aRa' \Longleftrightarrow (a, a') \in B$$

Esempio 57 Sia $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$. La relazione determinata da B è data da $1R1$, $1R2$, $2R3$.

Esempio 58 La relazione binaria in un insieme A associata all'insieme $\emptyset \subset A \times A$ è la relazione in cui per nessuna coppia a, b di elementi di A si ha aRb. La relazione binaria in un insieme A associata all'insieme $A \times A \subset A \times A$ è la relazione in cui si ha aRb per ogni coppia di elementi a, b di A.

Esercizio 59 Sia $A = \{n \in N \mid n < 10\}$. Considerare la relazione determinata da $B = \{(a, a') \in A^2 \mid a + a' = 10\}$. Determinare tutte le coppie di elementi in relazione tra loro.

Esercizio 60 Dato un insieme A con n elementi, calcolare il numero di relazioni binarie di A.

1.5 Relazioni d'ordine

Definizione 61 Una relazione R in un insieme A si dice **relazione d'ordine**, se essa verifica le seguenti proprietà:
proprietà riflessiva:
$aRa \ \ \forall a \in A$
proprietà antisimmetrica:
$aRa' \ , \ a'Ra \Longrightarrow a = a'$
proprietà transitiva:
$aRa' \ , \ a'Ra'' \Longrightarrow aRa''$.

Esempio 62 Consideriamo nell'insieme R dei numeri reali la seguente relazione:
$aRa' \Longleftrightarrow a \leq a'$.
Si verifica facilmente che si tratta di una relazione d'ordine.

Esercizio 63 Verificare quali delle relazioni date nel paragrafo precedente sono relazioni d'ordine.

Nota 64 Di solito, quando si ha una relazione d'ordine, si usa il simbolo $\prec$ al posto del simbolo R. Se si ha $a \prec a'$ si dice che a è **minorante** o **precede** a'. Si dice anche che a' è **maggiorante** o **segue** a.
Con questa notazione le tre proprietà che caratterizzano le relazioni d'ordine si scrivono:
$a \prec a \ \ \forall a \in A$
$a \prec a' \ , \ a' \prec a \Longrightarrow a = a'$
$a \prec a' \ , \ a' \prec a'' \longrightarrow a \prec a''$.

Definizione 65 Un insieme A si dice **ordinato** (o anche **parzialmente ordinato**) se in esso è definita una relazione d'ordine. Un insieme ordinato è quindi dato da una coppia formata da un insieme A e da una relazione $\prec$ in A. Indichiamo ciò con il simbolo $(A, \prec)$.

Nota 66 Si faccia attenzione alla definizione di insieme ordinato. Vi possono essere elementi a e b di un insieme ordinato $(A, \prec)$ per i quali non si ha nè $a \prec b$, nè $b \prec a$. Daremo tra poco esempi di casi del genere.

Definizione 67 Un insieme ordinato $(A, \prec)$ si dice **totalmente ordinato** se, dati comunque $a \in A$, $b \in A$, è verificata almeno una delle seguenti condizioni: $a \prec b$ oppure $b \prec a$.

Nota 68 La proprietà antisimmetrica implica che, se ambedue le condizioni $a \prec b$ e $b \prec a$ sono verificate allora $a = b$.
Pertanto in un insieme totalmente ordinato, dati comunque due elementi a e b distinti, si ha che è verificata una ed una sola della due condizioni $a \prec b$ e $b \prec a$.

Esempio 69 L'insieme R con la relazione d'ordine di $\leq$ (vedi sopra) è un insieme totalmente ordinato.

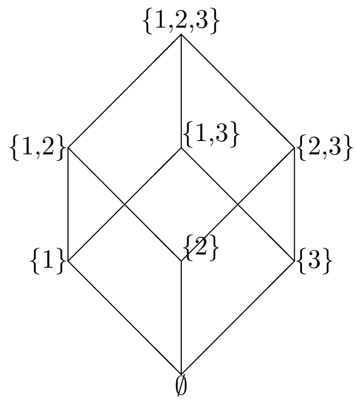
Esempio 70 Dato un insieme U, sia $P(U)$ l'insieme delle parti di U. La relazione $\prec$ in $P(U)$ data da $B \prec C \Longleftrightarrow B \subset C$ rende $P(U)$ un insieme ordinato non totalmente (esercizio).

Esempio 71 Nell'insieme N dei numeri interi positivi diamo la seguente relazione: $a \prec b$ se e solo se $b = ha$ con $h \in N$. Tale relazione rende $(N, \prec)$ un insieme ordinato non totalmente (la dimostrazione di ciò viene lasciata per esercizio).

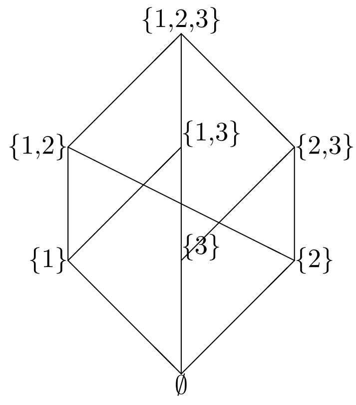
Definizione 72 Un **diagramma di Hasse**[2] di un insieme ordinato
$(A, \prec)$ è una rappresentazione grafica dell'insieme, i cui elementi sono rappresentati da punti e delle relazioni intercorrenti tra di essi.
Sia $a \in A$ e $b \in A$. Se $a \prec b$, e $a \neq b$, allora si disegna b più in alto di a. I punti rappresentanti a e b sono collegati tra loro se e solo se $a \prec b$ e non esiste alcun c tale che $a \prec c \prec b$ e $c \neq a$, $c \neq b$.

Esempio 73 Consideriamo l'insieme U formato da tre elementi che indichiamo con 1,2,3. In $P(U)$ introduciamo la relazione d'ordine data dalla relazione di inclusione (vedere esempio 70).
Rappresentiamo tale relazione con il seguente diagramma di Hasse:

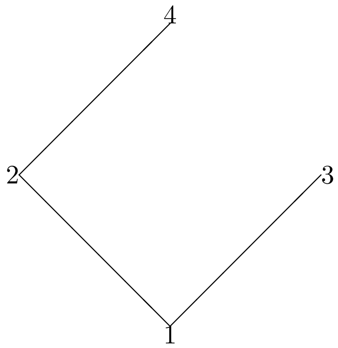
[2]**Helmut Hasse**, (1898-1979), algebrista tedesco.



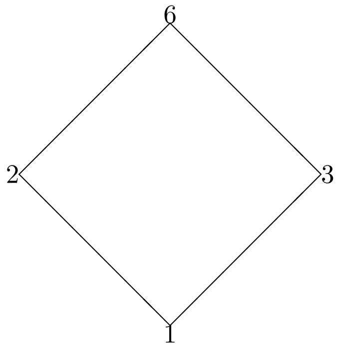
Nota 74 Salvaguardata la regola di disegnare un elemento b più in alto di un elemento a se $a \prec b$, i punti in un diagramma di Hasse si possono disegnare in qualsiasi posizione. Infatti ciò che interessa in un diagramma di Hasse sono i collegamenti tra i punti.
Per esempio, possiamo disegnare il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato precedente anche nel modo seguente:



Esempio 75 Sia $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Consideriamo in A la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Il diagramma di Hasse di A è il seguente:



Esempio 76 Sia D_6 l'insieme dei divisori di 6. Consideriamo in D_6 la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Il diagramma di Hasse di D_6 è il seguente:



Esercizio 77 Sia D_9 l'insieme dei divisori di 9. Si consideri in D_9 la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Tracciare il diagramma di Hasse di D_9.

Esercizio 78 Sia D_{30} l'insieme dei divisori di 30. Si consideri in D_{30} la relazione d'ordine data nell'esempio 71. Tracciare il diagramma di Hasse di D_{30}.

Definizione 79 Sia $(A, \prec)$ un insieme ordinato e siano $a \in A$ e $b \in A$. Un elemento $u \in A$ si dice **minimo comun maggiorante** di a e b se:
1) $a \prec u \ , \ b \prec u$
2) $a \prec x \ , \ b \prec x \Longrightarrow u \prec x$
Un elemento $v \in A$ si dice **massimo comun minorante** di a e b se:
1) $v \prec a \ , \ v \prec b$
2) $x \prec a \ , \ x \prec b \Longrightarrow x \prec v$

Esempio 80 Consideriamo un qualsiasi insieme $(A, \prec)$ totalmente ordinato. Siano a e b due elementi distinti di A. Sappiamo che necessariamente uno dei due elementi precede l'altro. Supponiamo, per fissare le idee, che si abbia $a \prec b$. Si verifica facilmente (esercizio) che a è il massimo comun minorante di a e b e che b è il minimo comun maggiorante di a e b.

Teorema 81 Sia $(A, \prec)$ un insieme ordinato e siano a, b elementi di A. Si ha che esiste al più un minimo comun maggiorante di a, b. Analogamente esiste al più un massimo comun minorante di a e b.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. $\Box$

Esempio 82 Consideriamo l'esempio 75. I numeri 2 e 3 hanno come massimo comun minorante il numero 1; non esiste invece alcun minimo comun maggiorante di 2 e 3.

Definizione 83 Un **reticolo** $(A, \prec)$ è un insieme ordinato tale che ogni coppia di elementi a, b in A è dotata di minimo comun maggiorante e di massimo comun minorante.

Esempio 84 L'insieme N con l'ordinamento dato dalla divisione (vedere esempio 71) è un reticolo. Dati infatti i numeri naturali a e b si ha che il loro massimo comun minorante è il loro massimo comun divisore mentre il loro minimo comun maggiorante è il loro minimo comune multiplo. Lasciamo la dimostrazione di ciò per esercizio.

Esercizio 85 Verificare che la coppia $(A, \prec)$ data nell'esempio 75 non è un reticolo.

Esempio 86 Dato un insieme U, l'insieme $P(U)$, con la relazione d'ordine data dall'inclusione (vedere l'esempio 70), è un reticolo. Dati infatti due sottoinsiemi di U il loro massimo comun minorante è la loro intersezione. Il loro minimo comun maggiorante è la loro unione. Si lascia la dimostrazione di ciò per esercizio.

Esempio 87 L'insieme N, con la relazione d'ordine data nell'esempio 71, è un reticolo. La dimostrazione di ciò viene lasciata per esercizio.

Esempio 88 Dato $n \in N$, sia D_n l'insieme dei divisori di n. Si consideri la relazione d'ordine $\prec$ data nell'esempio 71. Si ha che (esercizio) $(D_n, \prec)$ è un reticolo.

1.6 Relazioni di equivalenza.

Definizione 89 Una relazione R in un insieme A si dice **relazione di equivalenza** se essa verifica le seguenti proprietà :
proprietà riflessiva:
$aRa \quad$ per ogni $\ a \in A$
proprietà simmetrica:
$aRa' \implies a'Ra$

proprietà transitiva:
aRa' , $a'Ra'' \Longrightarrow aRa''$.

Nota 90 Di solito, quando si ha una relazione di equivalenza, si usa il simbolo $\sim$ al posto del simbolo R. Con questa notazione le tre proprietà precedenti vengono scritte nel seguente modo:
$a \sim a \;\; \forall a \in A$
$a \sim a' \;\Longrightarrow a' \sim a$
$a \sim a'$, $a' \sim a'' \Longrightarrow a \sim a''$.

Esempio 91 Nell'insieme delle rette di un piano consideriamo equivalenti due rette se e solo se esse sono parallele (due rette complanari si dicono parallele se e solo se esse coincidono o non hanno alcun punto in comune). Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

Esercizio 92 Nell'insieme delle rette di un piano consideriamo equivalenti due rette se e solo se esse sono perpendicolari. Si tratta di una relazione di equivalenza?

Esercizio 93 In alcuni paesi della Sicilia si dice che due rette di un piano sono in *apparpagno* se esse sono parallele o perpendicolari. La relazione di apparpagno è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette del piano?

Esempio 94 Nell'insieme dei piani dello spazio consideriamo equivalenti due piani se e solo se sono paralleli (due piani si dicono paralleli se e solo se essi coincidono o non hanno alcun punto in comune). Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

Esercizio 95 Nell'insieme dei piani dello spazio consideriamo equivalenti due piani se e solo se essi sono perpendicolari. Si tratta di una relazione di equivalenza?

Esempio 96 Nel corso del primo anno è stata già vista la relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti orientati data dall'equipollenza: due segmenti orientati del piano (o dello spazio) si dicono equipollenti se essi appartengono a rette parallele, sono equiorientati ed hanno la stessa lunghezza.

Esempio 97 Si consideri un punto O di un piano. Nell'insieme dei punti del piano, diciamo equivalenti due punti se essi hanno la stessa distanza da O. Si tratta di una relazione di equivalenza (esercizio).

Esempio 98 Analogo al precedente; ora però si considerano i punti dello spazio.

Esercizio 99 Consideriamo l'insieme $Z \times Z^*$, cioè l'insieme delle coppie (a, b) di numeri interi con $b \neq 0$. Fissiamo in esso la seguente relazione: $(a, b) \sim (c, d)$ se e solo se $ad - bc = 0$. Dimostrare che è una relazione di equivalenza.

Esercizio 100 Consideriamo un insieme A in cui sia data una relazione $\sim$ che verifichi la proprietà simmetrica e la proprietà transitiva. Vogliamo dimostrare che è verificata anche la proprietà riflessiva. Sia $a \sim b$. Per la proprietà simmetrica si ha allora $b \sim a$. Ma allora,da $a \sim b$, $b \sim a$, per la proprietà transitiva si ha $a \sim a$. Da questa dimostrazione sembra che, nella definizione di relazione di equivalenza, la proprietà riflessiva sia superflua. In effetti, ciò non è vero. La dimostrazione appena data è infatti *sbagliata*. Trovare l'errore.

Se non si è trovato l'errore, risolvere il seguente:

Esercizio 101 Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c\}$. Poniamo in A la relazione $\sim$ data da: $b \sim b, b \sim c, c \sim b, c \sim c$. Dimostrare che tale relazione verifica la proprietà simmetrica, la proprietà transitiva ma non la proprietà riflessiva.

Nota 102 L'esempio precedente costituisce un controesempio all'affermazione "dimostrata" nell'esercizio 100. Analizzando con cura l'esempio si dovrebbe ora essere in grado di determinare l'errore della dimostrazione.

Definizione 103 Sia dato un insieme A e sia data una relazione di equivalenza $\sim$ in A. Indichiamo con $[a]$ l'insieme degli elementi di A che sono equivalenti ad a. In simboli:

$$[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$$

Tale sottoinsieme $[a]$ di A viene chiamato **classe di equivalenza** di a.

Esempio 104 Le classi di equivalenza dell'esempio 91 sono le direzioni del piano.

Esempio 105 Le classi di equivalenza dell'esempio 94 sono le giaciture dello spazio.

Esempio 106 Le classi di equivalenza dell'esempio 96 sono i vettori del piano (dello spazio).

Esercizio 107 Determinare le classi di equivalenza degli esempi 97, 98 e 99.

Esempio 108 Introduciamo in $M(R, n, n)$ la seguente relazione:

$$A \sim B \Longleftrightarrow \det(A) = \det(B)$$

Si verifica facilmente che è una relazione di equivalenza. Due matrici appartengono alla stessa classe di equivalenza se e solo se hanno lo stesso determinante.

Teorema 109 Ogni elemento $a \in A$ appartiene ad una ed una sola classe di equivalenza. Quindi, se due classi $[a]$ e $[b]$ hanno almeno un elemento in comune, allora esse coincidono.
DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in A$. Dimostriamo che a appartiene ad una classe di equivalenza. Per la proprietà riflessiva si ha $a \sim a$. Quindi $a \in [a]$. Dimostriamo ora che a appartiene ad una sola classe. Sia $a \in [b]$. Quindi $a \sim b$. Dimostriamo che si ha $[a] = [b]$. Per far ciò dimostriamo innanzitutto che si ha $[a] \subset [b]$. Sia $a' \in [a]$. Allora $a' \sim a$. Ma $a \sim b$. Per la proprietà transitiva allora $a' \sim b$; da cui $a' \in [b]$. Dimostriamo ora che si ha $[b] \subset [a]$. Sia $b' \in [b]$. Allora $b' \sim b$. Ma $a \sim b$ e quindi, per la proprietà simmetrica,$b \sim a$. Da $b' \sim b$, $b \sim a$ segue, per la proprietà transitiva, $b' \sim a$. Da cui $b' \in [a]$. $\square$

Nota 110 Dal teorema precedente deriva in particolare:

$$b \sim a \Longleftrightarrow [b] = [a]$$

Definizione 111 Indichiamo con $A/\sim$ l'insieme avente come elementi le classi di equivalenza di A. Tale insieme viene detto **insieme quoziente** di A relativamente alla relazione di equivalenza $\sim$.

1.7 Funzioni

Richiamiamo alcune nozioni già viste nei corsi del primo anno.

Definizione 112 Dati due insiemi A e B, una **funzione** (o **applicazione**) tra A e B è una legge f che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento di B che viene indicato con $f(a)$. L'elemento $f(a)$ viene detto **immagine** di a attraverso f. Una funzione f tra A e B viene indicata con il simbolo $f : A \longrightarrow B$. L'insieme delle immagini degli elementi di a viene detto **immagine** di f. Esso viene indicato con il simbolo $f(A)$ o con il simbolo Imf. Quindi $f(A) \subset B$. In altre parole:

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Dato $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** (o **fibra**) di b il sottoinsieme di A dato dagli elementi di A le cui immagini coincidono con b. Tale sottoinsieme di A viene indicato con il simbolo $f^{-1}(b)$. In altre parole:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Esercizio 113 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Dimostrare che si ha:

$$b \in f(A) \Longleftrightarrow f^{-1}(b) \neq \emptyset$$

Esercizio 114 Consideriamo la funzione

$$r : R \longrightarrow R$$

che associa ad $a \in R$ il suo arrotondamento $round(a)$ come viene fatto in PASCAL. Determinare

$$r^{-1}(3)\ ,\ r^{-1}(3.5)\ ,\ r^{-1}(0)\ ,\ r^{-1}(-3)\ ,\ r^{-1}(-3.5)$$

Esercizio 115 Svolgere lo stesso esercizio precedente considerando, al posto della funzione arrotondamento, la funzione $trunc$ che associa ad $a \in R$ la sua parte intera.

Definizione 116 Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e dato $A' \subset A$ chiamiamo **immagine di** A' l'insieme delle immagini degli elementi di A'. Indichiamo questo insieme con il simbolo $f(A')$. Quindi:

$$f(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ tale che } f(a') = b\}$$

Possiamo anche definire la **restrizione** della funzione f a A', che viene indicata con il simbolo $f|_{A'}$ (si dice f **ristretta** ad A'). Essa è la funzione ottenuta considerando la funzione f solo sugli elementi di A'. La funzione $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$ è quindi definita da $f|_{A'}(a') = f(a')\ \forall a' \in A'$.
Si definisce anche la **funzione inclusione** $i : A' \longrightarrow A$ nel modo seguente $i(a') = a'\ \forall a' \in A'$

Definizione 117 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** (o **monomorfismo**) se elementi diversi hanno immagini diverse. Cioè:
f iniettiva $\Longleftrightarrow$ ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$).
O, equivalentemente:
f iniettiva $\Longleftrightarrow$ ($f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$).

Esercizio 118 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ iniettiva } \Longleftrightarrow \forall b \in B\ |f^{-1}(b)| \leq 1$$

Definizione 119 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** o **surgettiva** o **sopra** (o **epimorfismo**), se si ha $B = f(A)$.

Esercizio 120 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ surgettiva } \Longleftrightarrow \forall b \in B\ |f^{-1}(b)| \geq 1$$

Definizione 121 Una funzione si dice **biiettiva** o **biunivoca** se essa è iniettiva e suriettiva.

Esercizio 122 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ biiettiva } \iff \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| = 1$$

Esercizio 123 Consideriamo la nostra indagine tra gli studenti. Sia A l'insieme degli studenti. Consideriamo la funzione $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$ che associa ad ogni studente il numero degli esami del primo anno da lui superati. La funzione f è iniettiva, è surgettiva? Spiegare cosa è $f^{-1}(5)$.

Esercizio 124 Dare un esempio di funzione non iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione non iniettiva e surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e surgettiva (cioè biunivoca).

Esercizio 125 Dimostrare che, se A è un insieme finito e se $f : A \longrightarrow A$, allora f è iniettiva se e solo se f è surgettiva.

Definizione 126 Dato un insieme A la **funzione identica** di A è la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f(a) = a \ \forall a \in A$. Di solito la funzione identica di A viene indicata con il simbolo id_A (o con il simbolo id se non vi sono dubbi sull'insieme su cui opera l'identità) o anche con il simbolo 1_A.

Teorema 127 La funzione identica di un insieme A è biunivoca.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. □

Teorema 128 Dati $A' \subset A$, la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è iniettiva.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. □

Esercizio 129 Dimostrare che la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è surgettiva se e solo se $A' = A$.

Definizione 130 Dati due insiemi A e B definiamo le funzioni:
$p_A : A \times B \longrightarrow A$
$p_B : A \times B \longrightarrow B$
nel modo seguente:
$p_A[(a, b)] = a \quad p_B[(a, b)] = b$.
Esse sono dette **proiezioni** su A e su B rispettivamente.

Teorema 131 Le funzioni proiezioni $p_A : A \times B \longrightarrow A$ e $p_B : A \times B \longrightarrow B$ sono suriettive.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. □

Esercizio 132 Dimostrare che la funzione proiezione $p_A : A \times B \longrightarrow A$ è biunivoca se e solo se l'insieme B è formato da un solo elemento.
Dimostrare che la funzione proiezione $p_B : A \times B \longrightarrow B$ è biunivoca se e solo se l'insieme A è formato da un solo elemento.

Definizione 133 Sia A un insieme e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su A. Sia $A/\sim$ l'insieme quoziente. La funzione $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ definita da $\pi(a) = [a] \ \ \forall a \in A$ viene detta **funzione quoziente**.

Teorema 134 La funzione quoziente è surgettiva.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. $\square$

Esercizio 135 Consideriamo nell'insieme A degli studenti che frequentano il corso di geometria ed algebra la relazione di equivalenza $\sim$ così definita: dati $a \in A$ e $a' \in A$ poniamo $a \sim a' \Longleftrightarrow$ gli studenti a e a' hanno frequentato lo stesso tipo di scuola. Determinare $A/\sim$ e verificare se la funzione quoziente $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ è iniettiva.

Esercizio 136 Dimostrare che la funzione quoziente è iniettiva se e solo se la relazione $\sim$ è l'identità; cioè $a \sim b$ se e solo se $a = b$.

Definizione 137 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, esse si dicono **uguali** se si ha:

$$\forall a \in A \ \ f(a) = g(a)$$

Nota 138 Dalla definizione precedente segue che date due funzioni
$f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ sono diverse se esiste $a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$.

Esercizio 139 Siano date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, e sia $C \subset A$ e $C \neq A$.
Verificare la verità o falsità della seguente affermazione:

$$f|_C = g|_C \Longrightarrow f = g$$

1.8 Composizione di funzioni

Definizione 140 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, la **funzione composta** è la funzione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] \ \ \forall a \in A$$

Teorema 141 La composizione di funzioni verifica le seguenti proprietà :
proprietà associativa:
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \quad \forall f : A \longrightarrow B \ \ \forall g : B \longrightarrow C \ \ \forall h : C \longrightarrow D$
proprietà della funzione identica $id_A : A \longrightarrow A$:
$f \circ id_A = f \ \ \forall f : A \longrightarrow B$
$id_A \circ g = g \ \ \forall g : C \longrightarrow A$
DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Esercizio 142 Verificare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e $A' \subset A$, si ha $f|_{A'} = f \circ i$ dove $i : A' \longrightarrow A$ è la funzione inclusione.

Definizione 143 Data una funzione biunivoca $f : A \longrightarrow B$, la **funzione inversa** di f è la funzione:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definita da:
$f^{-1}(b) = a \quad$ dove $a \in A$ è tale che $f(a) = b$.

Nota 144 Il fatto che la funzione f sia biunivoca assicura che l'elemento a verificante la condizione richiesta esista e sia unico.

Nota 145 Attenzione. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ si indica sia la controimmagine di b attraverso una *qualsiasi* funzione f sia l'immagine di b attraverso la funzione f^{-1} inversa di una funzione f che sia *biunivoca.*

Teorema 146 La funzione inversa f^{-1} di una funzione biunivoca f è essa stessa biunivoca.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. $\square$

Esercizio 147 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca e sia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ la sua inversa. Dimostrare che si ha: $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.

Esercizio 148 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca. Dimostrare che esiste ed è unica la funzione $g : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$.
Tale funzione g è quindi la funzione f^{-1}.

Teorema 149 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Dimostrare la seguente affermazione:
$\exists g : B \longrightarrow A \mid f \circ g = id_B \ , \ g \circ f = id_A \Longleftrightarrow f$ è biunivoca.
DIMOSTRAZIONE. Lasciata per esercizio. $\square$

Teorema 150 Date le seguenti funzioni: $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, si ha:
1) f iniettiva $\wedge$ g iniettiva $\Longrightarrow g \circ f$ iniettiva
2) f surgettiva $\wedge$ g surgettiva $\Longrightarrow g \circ f$ surgettiva.
DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Esercizio 151 Siano date le funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$.
Dimostrare le seguenti affermazioni:
1) $g \circ f$ iniettiva $\Longrightarrow f$ iniettiva;
2) $g \circ f$ surgettiva $\Longrightarrow g$ surgettiva.

Esercizio 152 Determinare $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ tali che $g \circ f$ sia iniettiva e g non sia iniettiva.

Esercizio 153 Determinare $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ tali che $g \circ f$ sia suriettiva e f non sia suriettiva.

Esercizio 154 Dimostrare la seguente affermazione:
$f : A \longrightarrow B$ surgettiva $\Longleftrightarrow \exists g : B \longrightarrow A \mid f \circ g = id_B$.
Dimostrare inoltre che, se f è surgettiva e non iniettiva, allora esiste più di una funzione g verificante le condizioni date.

Esercizio 155 Dimostrare la seguente affermazione:
$f : A \longrightarrow B$ iniettiva $\Longleftrightarrow \exists g : B \longrightarrow A \mid g \circ f = id_A$.
Dimostrare inoltre che, se f è iniettiva e non surgettiva, allora esiste più di una funzione g verificante le condizioni date.

1.9 Diagrammi commutativi

Definizione 156 Siano date le seguenti funzioni tra insiemi:
$f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : A \longrightarrow D$, $k : D \longrightarrow C$.
Se $g \circ f = k \circ h$, diciamo che il seguente diagramma è **commutativo**.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow h & & \downarrow g \\ D & \xrightarrow{k} & C \end{array}$$

Se si parte infatti da un qualsiasi elemento a dell'insieme A posto nel vertice alto sinistro del diagramma e si arriva nell'insieme C percorrendo le due strade possibili (una volta passando per B e arrivando quindi a $(g \circ f)(a)$ e una seconda volta passando per D e arrivando quindi a $(k \circ h)(a)$), si ottiene lo stesso elemento.

Esempio 157 Sappiamo che, data una qualsiasi matrice invertibile A, si ha det $(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$. Esprimiamo ciò utilizzando il simbolismo appena introdotto.
Indichiamo con $GL(R, n)$ l'insieme delle matrici invertibili di ordine n a coefficienti reali. Le lettere GL sono le iniziali di gruppo lineare. Spiegheremo nel terzo capitolo perché usiamo la parola "gruppo".
Sia $\det : GL(R, n) \longrightarrow R^*$ la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante.
Sia $f : R^* \longrightarrow R^*$ la funzione che associa ad ogni numero reale non nullo il suo inverso; sia $f' : GL(R, n) \longrightarrow GL(R, n)$ la funzione che associa ad ogni matrice invertibile la sua inversa. Allora il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} GL(R,n) & \xrightarrow{f'} & GL(R,n) \\ \downarrow det & & \downarrow det \\ R^* & \xrightarrow{f} & R^* \end{array}$$

Esempio 158 Date $A \in M(R, n, n)$ e $B \in M(R, n, n)$ sappiamo che si ha:

$$^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

Questa formula può essere espressa dicendo che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} M(R,n,n)\times M(R,n,n) & \xrightarrow{m} & M(R,n,n) & \xrightarrow{tr} & M(R,n,n) \\ \downarrow tr\times tr & & & & \uparrow m \\ M(R,n,n)\times M(R,n,n) & & \xrightarrow{s} & & M(R,n,n)\times M(R,n,n) \end{array}$$

dove:
$tr : M(R,n,n) \longrightarrow M(R,n,n)$ è definita da: $tr(A) = {}^t(A)$;
$m : M(R,n,n) \times M(R,n,n) \longrightarrow M(R,n,n)$ è definita da $m[(A,B)] = A \cdot B$;
$tr \times tr : M(R,n,n) \times M(R,n,n) \longrightarrow M(R,n,n) \times M(R,n,n)$ è definita da $(tr \times tr)[(A,B)] = ({}^tA, {}^tB)$;
$s : M(R,n,n) \times M(R,n,n) \longrightarrow M(R,n,n) \times M(R,n,n)$ è definita da $s[(A,B)] = (B,A)$.

Esempio 159 Sia $det : M(R,n,n) \longrightarrow R$ la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante e sia $tr : M(R,n,n) \longrightarrow M(R,n,n)$ la funzione che associa ad ogni matrice A la sua trasposta ${}^tA$. Nel corso di Geometria 1 si è visto che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} M(R,n,n) & \xrightarrow{tr} & M(R,n,n) \\ det \searrow & & \swarrow det \\ & R & \end{array}$$

Esercizio 160 Esprimere in forma di diagramma commutativo il seguente teorema:

$$\text{rango }(A) = \text{rango }({}^tA)$$

1.10 Passaggio al quoziente

Esempio 161 Supponiamo che io abbia svolto un'indagine tra gli studenti. Ad ognuno di essi ho chiesto il tipo di scuola di provenienza, l'anno di immatricolazione all'università e i voti riportati nei singoli esami del primo anno.
Supponiamo che io voglia sapere quali siano gli studenti che frequentano il corso di geometria ed algebra che provengono dal liceo classico o dal liceo scientifico. Non ho alcuna difficoltà nel far ciò. Prendo i risultati della mia indagine tra gli studenti e, per ogni studente, vado a vedere il tipo di scuola di provenienza e controllo se esso è liceo classico o liceo scientifico.
Supponiamo ora che io abbia suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza e che poi abbia distrutto i dati originali dell'indagine. Sono sempre in grado di sapere quali siano gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico? Certamente sì . Mi basta prendere l'insieme degli studenti che hanno frequentato il liceo classico e l'insieme degli studenti che hanno frequentato il liceo scientifico.
Analizziamo ora un caso differente. Supponiamo che io abbia suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione e che poi abbia distrutto i dati originali

dell'indagine. Sono sempre in grado di sapere quali siano gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico? Ovviamente no. Per ogni studente ora conosco solo l'anno di immatricolazione. Non sono più in grado di determinare il tipo di scuola di provenienza.
Formalizziamo tutto ciò. Indichiamo con A l'insieme degli studenti. Indichiamo con B l'insieme $\{0, 1\}$. Ad ogni studente assegniamo il simbolo 1 se esso ha frequentato il liceo classico o scientifico e il simbolo 0 in caso contrario.
Abbiamo quindi definito una funzione $f : A \longrightarrow B$. L'insieme L degli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico è dato da $f^{-1}(1)$.
Analizziamo ora il primo caso: quello in cui abbiamo suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza. Abbiamo cioè introdotto in A la relazione di equivalenza $\sim$ data da: dati $a \in A$, $a' \in A$ si ha $a \sim a' \Longleftrightarrow$ gli studenti a e a' hanno frequentato lo stesso tipo di scuola.
L'aver suddiviso gli studenti per tipo di scuola di provenienza corrisponde ad aver considerato l'insieme quoziente $A/\sim$. Ogni elemento di $A/\sim$ è formato da tutti e soli gli studenti che hanno frequentato uno stesso tipo di scuola. Posso quindi chiamare ogni elemento di $A/\sim$ con il tipo di scuola frequentato da tutti i suoi elementi.
Ho poi la funzione quoziente $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ che associa ad ogni elemento $a \in A$, cioè ad ogni studente, l'insieme $[a] \in A/\sim$ formato da tutti gli studenti che hanno frequentato lo stesso tipo di scuola frequentato da a.
Mi sono posto la domanda se sono in grado di determinare gli studenti che hanno frequentato il liceo classico o scientifico dalla sola conoscenza di $A/\sim$ e di $\pi : A \longrightarrow A/\sim$. Notiamo che, se siamo in grado di costruire una funzione $g : A/\sim \longrightarrow B$ tale che si abbia $f = g \circ \pi$, abbiamo: $L = f^{-1}(1) = (g \circ \pi)^{-1}(1)$.
Ecco che la determinazione della funzione g ci permette di risolvere il nostro problema. E' molto semplice definire la funzione g. Definisco infatti la funzione $g : A/\sim \longrightarrow B$ associando ad ogni elemento di $x \in A/\sim$ il simbolo 1, se il tipo di scuola frequentato da un qualsiasi studente appartenente a x è il liceo classico o scientifico, e il simbolo 0 in caso contrario. Ho risolto il mio problema.
Studiamo ora il secondo caso; quello in cui ho suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione. Ho quindi introdotto in A la seguente relazione di equivalenza $\approx$: dati $a \in A$ e $a' \in A$, pongo $a \approx a' \Longleftrightarrow a$ e a' si sono immatricolati nello stesso anno. L'aver suddiviso gli studenti per anno di immatricolazione corrisponde ad aver considerato l'insieme quoziente $A/\approx$. Indichiamo con $\pi' : A \longrightarrow A/\approx$ la funzione quoziente. Ci chiediamo se esiste una funzione $g' : A/\approx \longrightarrow B$ tale che $f = g' \circ \pi'$. La risposta è in generale negativa. Vi possono essere infatti studenti che si sono iscritti nello stesso anno che non hanno frequentato lo stesso tipo di scuola.

Nota 162 L'esempio appena visto ci ha mostrato che può essere importante risolvere il seguente problema.
Sia data una funzione tra insiemi $f : A \longrightarrow B$ e sia data una relazione di equivalenza $\sim$ in A. Consideriamo l'insieme quoziente $A/\sim$. Esiste una funzione $g : A/\sim \longrightarrow B$ tale che $f = g \circ \pi$ dove $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ è la funzione quoziente? Ci chiediamo, in altre parole, se esiste una funzione g che renda commutativo il

seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} A & \stackrel{f}{\longrightarrow} & B \\ \pi \searrow & & \nearrow g \\ & A/\sim & \end{array}$$

Definizione 163 Nel caso in cui la funzione g esista, si dice che la funzione f **passa al quoziente** relativamente alla relazione $\sim$. La funzione g viene detta **funzione quozientata** e viene spesso indicata con il simbolo $f/\sim$.

Definizione 164 Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e una relazione di equivalenza $\sim$ su A, diciamo che la funzione f è **compatibile** con la relazione di equivalenza $\sim$ se si ha:

$$a \sim a' \implies f(a) = f(a')$$

Teorema 165 Data una funzione tra insiemi $f : A \longrightarrow B$ e data una relazione di equivalenza $\sim$ in A, esiste una funzione $g : A/\sim \longrightarrow B$ tale che $f = g \circ \pi$ (dove $\pi : A \longrightarrow A/\sim$ è la funzione quoziente) se e solo se la funzione f è compatibile con la relazione di equivalenza $\sim$.
DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che la funzione f sia compatibile con $\sim$. Dimostriamo che esiste la funzione g.
Definiamo la funzione g nel modo seguente:

$$g([a]) = f(a)$$

Notiamo che, per definire la funzione g, abbiamo scelto un elemento della classe $[a]$. Ci poniamo allora la domanda: la definizione della funzione g dipende dalla scelta dell'elemento in $[a]$? Una funzione si dice **ben posta** se la sua definizione non dipende dalle scelte fatte nel dare la definizione. Dimostriamo che nel nostro caso la definizione di g è ben posta. Sia $a' \in [a]$; quindi $a' \sim a$. Ma allora $f(a') = f(a)$ e quindi $g([a']) = g([a])$.
Abbiamo dimostrato che la definizione di g è ben posta. Abbiamo quindi effettivamente una funzione $g : A/\sim \longrightarrow B$. Si verifica poi facilmente che la funzione g ora definita rende commutativo il diagramma.
Viceversa, supponiamo che la funzione g esista e dimostriamo che la funzione f è compatible con $\sim$. Dobbiamo dimostrare che si ha:

$$a \sim a' \implies f(a) = f(a')$$

Sia $a \sim a'$. Allora si ha $[a] = [a']$. Quindi

$$f(a') = (g \circ \pi)(a') = g([a']) = g([a]) = (g \circ \pi)(a) = f(a)$$

Abbiamo quindi dimostrato il teorema. $\Box$

Esercizio 166 Sia data la funzione $f : M(R, n, n) \longrightarrow N \cup \{0\}$ che associa ad ogni matrice il suo rango. Si consideri in $M(R, n, n,)$ la relazione di equivalenza $\sim$ data da:

$$A \sim A' \iff \det(A) = \det(A')$$

Verificare se la funzione f passa al quoziente.

Esercizio 167 Sia $f : M(R, n, n) \longrightarrow R$ la funzione che associa ad ogni matrice il suo determinante. Sia $\sim$ la relazione di equivalenza in $M(R, n, n)$ data dalla **similitudine**. Essa è data da:

$$A \sim A' \Longleftrightarrow \exists M \in GL(R, n) \mid A' = M^{-1}AM$$

Verificare che la funzione f passa al quoziente.

Esercizio 168 Sia $r : R \longrightarrow Z$ la funzione che associa ad ogni numero il suo arrotondamento. Introduciamo in R una relazione di equivalenza definendo equivalenti due numeri se essi hanno la stessa parte intera. La funzione r passa al quoziente relativamente alla relazione di equivalenza data?

Teorema 169 Sia data una relazione di equivalenza $\sim$ in un insieme A e una funzione tra insiemi $f : A \longrightarrow B$ compatibile con $\sim$. Sia $g : A/\sim \longrightarrow B$ la funzione quozientata. Si ha:

$$f(A) = g(A/\sim)$$

Quindi la funzione g è surgettiva se e solo se la funzione f è surgettiva.
DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Esercizio 170 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione compatibile con una relazione di equivalenza $\sim$ in A. Sia $g : A/\sim \longrightarrow B$ la funzione quozientata.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

$$f \text{ iniettiva} \Longrightarrow g \text{ iniettiva}$$

$$g \text{ iniettiva} \Longrightarrow f \text{ iniettiva}$$

Esercizio 171 Si consideri la relazione di equivalenza in $M(R, n, n)$ data da $A \sim B \Longleftrightarrow \det(A) = \det(B)$ (esempio 108). Verificare che esiste una funzione biunivoca tra $M(R, n, n)/\sim$ e R.

Esercizio 172 Si consideri in $R^2 - \{(0, 0)\}$, dato dalle coppie di numeri reali non entrambi nulli, la seguente relazione:

$$(a, b) \sim (a', b') \iff a' = ha \ , \ b' = hb \ \text{ con } h \in R^*.$$

Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza e che esiste una funzione biunivoca tra il suo insieme quoziente e l'insieme quoziente dell'esempio 91.

Esercizio 173 Dimostrare che esiste una funzione biunivoca tra l'insieme quoziente dell'esempio 99 e l'insieme Q dei numeri razionali.