ESERCIZIO: SISTEMI LINEARI OMOGENEI 7/11/2011

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ l'insieme delle soluzioni sarà un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

matrice associata → più ridotta alla forma a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2 = R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2 \text{ pivot} \Rightarrow \boxed{\text{rango} = 2}$$

è una retta!

dimensione dello spazio delle soluzioni: $\text{Sol}\,\Sigma_0 = \#\text{variabili} - \text{rg}\,\Sigma_0 = 3 - 2 = 1$

Per descrivere uno spazio vettoriale basta definire i GENERATORI.
Lo sappiamo noi, gli altri saranno suoi multipli. → una retta è generata da un vettore.

$\Rightarrow$ $\text{Sol}\,\Sigma_0$ è una retta in $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow$ $\text{Sol}\,\Sigma_0 = \langle\langle v \rangle\rangle$ → sarà una soluzione fondamentale del sistema

arriviamo alla forma CANONICA.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_2 = \frac{R_2}{2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{R_1 = R_1 - R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ forma a gradini canonica.

risolviamo il sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

→ variabile libera! (le altre 2 sono legate)

$\Rightarrow$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | $0$ | $1$ | $\Rightarrow v = (1; 0; 1)$ |
| $-a$ | $0$ | $a$ | $\Rightarrow w = (-a; 0; a)$ |

$\Rightarrow \text{Sol}\,\Sigma_0$ è $\langle\langle (-1; 0; 1) \rangle\rangle$. La soluzione generale del sistema si ottiene dando un parametro alla variabile libera $(a)$. $\Rightarrow (-a, 0, a)$

$$\Rightarrow \text{Sol}\,\Sigma_0 = \{ (-a; 0; a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R} \}$$ insiemisticamente ho scritto le soluzioni generali di $\Sigma_0$.

$$= \{ a(-1; 0; 1) \mid a \in \mathbb{R} \}$$ ci fa capire esattamente come i vettori di $\text{Sol}\,\Sigma_0$ sono fatti nello spazio. Sono tutti multipli TRAMITE IL parametro $a$ DEL VETTORE $(-1,0,1)$.

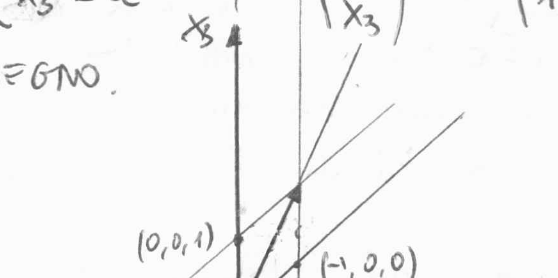
Siamo partiti dell'equazione cartesiana della retta, DATA DAL SISTEMA $\Sigma_0$ - POSSIAMO dare l'equazione parametrica: (in $\mathbb{R}^3$) CONSIDERANDO LA SOLUZIONE GENERALE DI

$$\Sigma_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a \\ x_2 = 0 \\ x_3 = a \end{cases}$$

Posso dare l'equazione vettoriale della retta.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ uguagliando coordinata per coordinata troviamo la parametrica.

DISEGNO.




$r = \text{Sol}\,\Sigma_0 = \langle\langle (-1, 0, 1) \rangle\rangle$

DEFINIZIONE

Si chiama COMBINAZIONE LINEARE dei vettori $v_1, \dots, v_k \in V$, spazio vettoriale ~~[illegible]~~ l'espressione $\boxed{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_k v_k.}$ Dove $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in$ Campo su cui è definito $V$ e sono scalari.

DEFINIZIONE

L'insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori $v_1, \dots, v_k$ è un sottospazio vettoriale di $V$ detto spazio generato da $v_1, \dots, v_k$ e indicato con $\ll v_1, \dots, v_k \gg$.

ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

Siano dati $K$ corpi di massa $m_1, \dots, m_k$ posti in punti di $\mathbb{R}^3$ di coordinate $(x_i, y_i, z_i)$ con $i = 1, \dots, K$. Se voglio trovare il BARICENTRO:

$\Rightarrow$ la massa totale del sistema di corpi è $M = \sum_{i=1}^{K} m_i$.

$\Rightarrow$ il baricentro del sistema dei corpi dati è il vettore $G = \frac{m_1}{M} v_1 + \frac{m_2}{M} v_2 + \dots + \frac{m_K}{M} v_K$

ed è dunque la combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots v_K$ che individuano in $\mathbb{R}^3$ i punti dove si trovano i corpi. (le loro posizioni) con questi particolari scalari.

Questo è un esempio della MEDIA PESATA. VEDIAMO UN ESEMPIO DI MEDIA:

ES

| | studenti A | B | C | Crediti |
|---|---|---|---|---|
| I parte | 20 | 24 | 26 | 5 |
| II parte | 28 | 30 | 24 | 7 |

$v_1 = (20, 24, 26)$ , $v_2 = (28, 30, 24)$

$m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2$ : QUESTA È UNA MEDIA ARITMETICA!

Se voglio un voto finale devo fare una media pesata, ESSENDO DIVERSI I CREDITI DELLE DUE PARTI

$m$ pesata $= \frac{5}{12} v_1 + \frac{7}{12} v_2$

$A \Rightarrow \frac{5}{12} 20 + \frac{7}{12} 28 =$ voto di A (combinazione lineare di vettori $v_1$ e $v_2$ = MEDIA)

DEFINIZIONE

$K$ vettori $v_1, \dots, v_K \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI se una ~~[illegible]~~ loro combinazione lineare $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_k v_k$ è $= 0$ (vettore nullo) $\Leftrightarrow$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_K = 0$. Se la c.l. è nulla gli scalari sono nulli e se gli scalari sono nulli allora la somma è nulla. Una delle due è sempre vera.

~~Quindi si verifica l'indipendenza lineare~~.

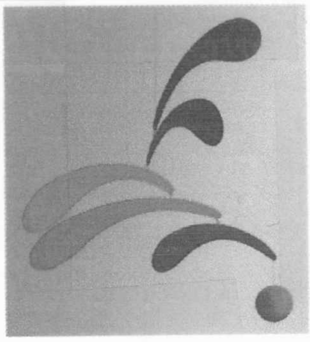
L'implicazione "$\Leftarrow$" è vera sempre (è data per scontata), mentre l'altra "$\Rightarrow$" va dimostrata.

Vettori non linearmente indipendenti, sono detti linearmente dipendenti.

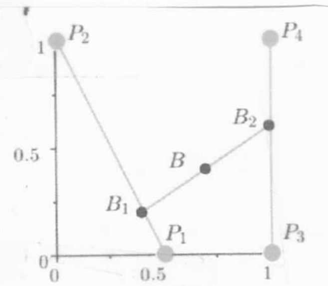
ESEMPIO DI COMBINAZIONE LINEARE

iii) Sculture cinetiche

L'artista "cinetico" A. CALDER (1896 - 1976) ha realizzato molte sculture composte da più elementi, nelle quali la posizione dei baricentri hanno un ruolo importante. La scelta dei punti di sospensione rende possibile il movimento delle parti senza perdere la stabilità complessiva.



Schematizziamo una sua opera: 4 punti pesanti con coordinate $P_1=(\frac{1}{2},0)$; $P_2(0,1)$; $P_3=(1,0)$ e $P_4=(1,1)$ sono uniti a coppie da asticelle di massa trascurabile




Le asticelle sono unite da un'ulteriore asta $B_1 B_2$ e tutta la struttura è sospesa per il punto B. I pesi dei punti sono diversi $P_1$ peso 4, $P_2$ peso 1, $P_3$ peso 2, $P_4$ peso 3. La struttura è stabile se $B_1$ è il baricentro di $P_1 P_2$ e $B_2$ è il baricentro di $P_3 P_4$ e $B$ è il baricentro complessivo del sistema. Calcoliamo dove cade B!

La massa di $P_1 P_2$ è 5 $\Rightarrow$ $B_1 = \frac{4}{5} P_1 + \frac{1}{5} P_2 =$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2},0\right) + \frac{1}{5}(0,1) = \left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$$

La massa complessiva di $P_3 P_4$ è 5 $\Rightarrow$ $B_2 = \frac{2}{5} P_3 + \frac{3}{5} P_4$

$$= \frac{2}{5}(1,0) + \frac{3}{5}(1,1) = \left(1,\frac{3}{5}\right)$$

La massa complessiva di $B_1 B_2$ è 10 $\Rightarrow$ $B = \frac{5}{10} B_1 + \frac{5}{10} B_2$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(1,\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{7}{10},\frac{4}{10}\right)$$

... $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (2,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$. Tre vettori in $\mathbb{R}^3$. Sono linearmente indipendenti?

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$ (eq. vettoriale). e daranno sempre origine a dei sistemi scalari

e stabiliamo le coordinate dei vettori.

$$\Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_3 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\Rightarrow}{\text{somma di vettori}} \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

uguaglianza fra due vettori: sono uguali se hanno uguali tutte le coordinate

$$\Rightarrow \Sigma_0 \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Mi serve solo il rango.

$\det(A) = 1+2 = 3 \neq 0 \Rightarrow$ rango di $A = 3$

Dimensione $Sol\,\Sigma_0 = 3-3 = 0$ l'unica soluzione del sistema è $(0,0,0)$

pertanto è verificato che i miei tre vettori sono linearmente indipendenti.

CONSIDERANDO DUE VETTORI:

$v_1, v_2 \in V$, considero $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Se $v_1$ e $v_2$ sono linearmente dipendenti vuol dire che esistono delle coppie $\alpha_1, \alpha_2 \neq$ da $0,0$.

~~[illegible]~~ CIOE' AD ESEMPIO

$\exists (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$ con $\tilde{\alpha}_1 \neq 0$ tali che $\tilde{\alpha}_1 v_1 + \tilde{\alpha}_2 v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\dfrac{\tilde{\alpha}_2}{\tilde{\alpha}_1} v_2$

$\Rightarrow$ $v_1, v_2$ sono linearmente dipendenti se sono uno multiplo dell'altro. Geometricamente parlando, $v_1$ e $v_2$ si trovano sulla stessa retta per l'origine.

Se sono linearmente indipendenti, le due combinazioni lineari di $v_1$ e $v_2$ generano un PIANO.

Se si 3 vettori, a due a due POSSONO essere linearmente indipendenti, MA POSSONO NON ESSERLO tutti e 3: ESEMPIO

$w_1 = (1,0,1)$ $w_2 = (2,1,0)$ e $w_3 = (3,1,1) \Rightarrow$

$w_3 = w_1 + w_2$ ! $\Rightarrow$ l'ultimo vettore è una combinazione lineare di $w_1$ e $w_2$! Posso scrivere tutte LE COMBINAZ. LINEARI DI $w_1, w_2, w_3$ in funzione di $w_1$ e $w_2$!

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 (w_1 + w_2) \Rightarrow$ i tre vettori sono linearmente dipendenti poiché tutti e tre stanno nel piano formato dai primi due.

## DEFINIZIONE

Dato uno spazio vettoriale $V$, si chiama **BASE** di $V$ un insieme di generatori di $V$ linearmente indipendenti.

Considerando $\mathbb{R}^2$, ne cerco una BASE.

Mi scrivono 2 vettori $\Rightarrow v_1 = (1, 0, 1)$ e $v_2 = (0, -1, -1) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

sono generatori di $\mathbb{R}^2$ ; sono linearmente indipendenti: INFATTI!

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

l'unica è $\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ linearmente indipendenti.

$$\Rightarrow B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$