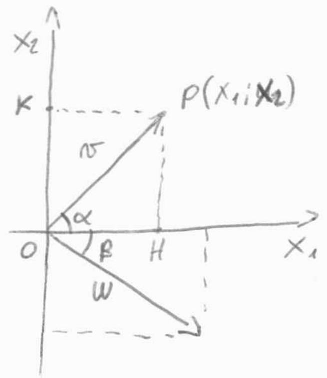
PRODOTTO SCALARE STANDARD tra vettori di $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n) \times (y_1, y_2 \ldots y_n) \longrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = X \cdot Y$ $\quad X = (x_1, x_2 \ldots x_n)$, $Y = (y_1, y_2 \ldots y_n)$



$OH = v \cos\alpha$
$OK = v \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow v = (|v| \cos\alpha, |v| \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow$
$v = |v|(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

CONSIDERIAMO UN ALTRO VETTORE w $\Rightarrow$ ANALOGAMENTE A PRIMA
$w = |w|(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ $\Rightarrow$ SE FACCIO IL PRODOTTO SCALARE STANDARD $v \cdot w$ SI HA:

$$v \cdot w = (|v|(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)) \cdot (|w|(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)) = (|v|\cos\alpha, |v|\operatorname{sen}\alpha) \cdot (|w|\cos\beta, |w|\operatorname{sen}\beta) =$$
$$= |v|\cos\alpha |w|\cos\beta + |v|\operatorname{sen}\alpha |w| \operatorname{sen}\beta = |v||w|(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta) =$$
$$= |v||w|\cos(\alpha-\beta) = \boxed{|v||w|\cos\gamma}$$ (DOVE γ È L'ANGOLO COMPRESO TRA v e w)

$$\Longrightarrow \quad v \cdot w = |v|\,|w| \cos(\widehat{vw})$$

PRODOTTO VETTORIALE

Dati due vettori di $\mathbb{R}^3$ $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$
$\Rightarrow$ posso definire il loro PRODOTTO VETTORIALE $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
IN QUESTO MODO: $\quad (v, w) \longrightarrow v \times w = v \wedge w$
DATA LA MATRICE CON ENTRATE = COORDINATE DI v e w

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ IL PRODOTTO VETTORIALE È DATO DALLE COORDINATE:

COORDINATE $v \times w$ = SOMMA DEI DETERMINANTI DEI MINORI DI ORDINE 2 CON I SEGNI CHE SEGUONO LE REGOLE DEL PRODOTTO TRA MATRICI

$$= (x_2 y_3 - y_2 x_3), -(x_1 y_3 - y_1 x_3), (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

- il PRODOTTO VETTORIALE non può essere generalizzato in $\mathbb{R}^n$ ma rimane in $\mathbb{R}^3$
- il modulo del vettore risultante $v \times w$ rappresenta l'area del parallelogramma di lati v e w
- LA SUA DIREZIONE È QUELLA DATA DALLA PERPENDICOLARE AL PIANO GENERATO DAI VETTORI v e w.
- IL VERSO È DATO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA

Sia V un insieme e su V definiamo due operazioni:
la somma e la moltiplicazione per uno scalare di un campo K

$+ : V \times V \longrightarrow V$
$(v_1, v_2) \longrightarrow v_1 + v_2$

– la somma + verifica le proprietà CHE DEFINISCONO UN GRUPPO ABELIANO:
1) ASSOCIATIVA
2) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO: ELEMENTO NULLO
3) $\forall v \in V$ $\exists$ L'OPPOSTO $-v$
4) COMMUTATIVA

– La moltiplicazione per uno scalare $\alpha \in K$: $\cdot\alpha : K \times V \longrightarrow V$
che verifica: $(\alpha; v) \longrightarrow \alpha v$
1) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall v \in V$
2) $\exists$ ELEMENTO NEUTRO ED È L'UNITÀ DEL CAMPO K
3) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA: $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ e $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
$\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall v, v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow (V; +; \cdot\alpha)$ è una struttura algebrica su V detta <u>SPAZIO VETTORIALE</u> i cui elementi sono detti <u>VETTORI</u>

Esempi
– $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale
– $(M_{k \times n}(\mathbb{R}); +; \cdot\alpha)$ è uno spazio vettoriale
– $\{f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathcal{F}_{[a;b]}$: date $f, g \in \mathcal{F}_{[a;b]} \Rightarrow f+g \in \mathcal{F}_{[a;b]}$
e $f+g$ È COSÌ DEFINITA : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$\alpha f \in \mathcal{F}_{[a;b]}$ È COSÌ DEFINITA: $\Rightarrow (\alpha f)(x) = \alpha(f(x))$ $\alpha \in \mathbb{R}$

Esercizio: – DIMOSTRARE CHE $(\mathcal{F}_{[a;b]}, +, \cdot\alpha)$ È UNO SPAZIO VETTORIALE
– $C^0_{[a;b]} = \{f [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue$\}$ vedere se $(C^0_{[a;b]}, +, \cdot\alpha)$ è uno spazio vettoriale
– $C^1_{[a;b]} = \{f [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabili in $[a;b]\}$ vedere se $(C^1_{[a;b]}, +, \cdot\alpha)$ è uno spazio vettoriale

Sia Σ_0 un sistema lineare omogeneo di k equazioni in n incognite.
Le soluzioni che troveremo vivono in uno spazio ambiente n dimensionale, uno spazio vettoriale n-dimensionale.
Supponiamo che $\exists$ una soluzione non nulla di Σ_0 $v=(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n \equiv 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{k1}\tilde{x}_1 + \dots + a_{kn}\tilde{x}_n \equiv 0 \end{cases}$$

Considero $\alpha v = (\alpha\tilde{x}_1, \alpha\tilde{x}_2, \dots \alpha\tilde{x}_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

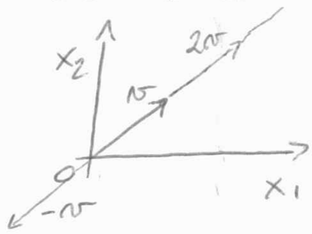
$\Rightarrow \alpha v$ è soluzione del sistema: $\alpha v \in Sol\, \Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ se $\exists\, v \in Sol\, \Sigma_0$, $v \neq 0 \Rightarrow \exists$ infinite soluzioni del sistema Σ_0
PERCHE' ABBIAMO VISTO CHE $\alpha v \in Sol\, \Sigma_0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Esempio

sistema di 2 incognite: SUPPONIAMO CHE $v \in Sol\, \Sigma_0$ e $v \neq 0 \Rightarrow$ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI $Sol(\Sigma_0)$ CONTIENE LA RETTA r, GENERATA DAL VETTORE $v \Rightarrow$ $r = \langle\langle v \rangle\rangle \subseteq Sol(\Sigma_0)$

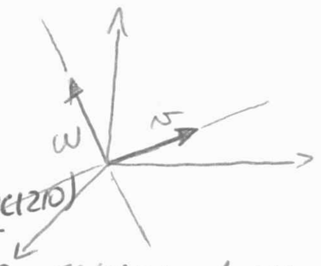
SPAZIO DI SOLUZIONI: RETTA



Se ogni soluzione di Σ_0 è del tipo $\alpha \cdot v$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow Sol\, \Sigma_0$ è la retta per l'origine GENERATA da v: $\langle\langle v \rangle\rangle$ (INSIEME GENERATO DA UN VETTORE)
v è detta SOLUZIONE FONDAMENTALE

Supponiamo che $\exists\, w / w \neq \alpha v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, SUPPONIAMO INOLTRE CHE $w \in Sol\, \Sigma_0$ $\Rightarrow \beta w \in Sol\, \Sigma_0 \ \forall \beta \in \mathbb{R}$
cioè $\langle\langle w \rangle\rangle \subset Sol\, \Sigma_0$

$\Rightarrow$ presi αv e βw, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v + \beta w \in Sol\, \Sigma_0$
(VERIFICARE PER ESERCIZIO)



$\Rightarrow$ il piano π generato dalle rette $\langle\langle v \rangle\rangle$ e $\langle\langle w \rangle\rangle$, passante per l'origine $\subset Sol\, \Sigma_0$: $\pi = \langle\langle v, w \rangle\rangle$: v e w SI DICONO " SOLUZIONI FONDAMENTALI DI Σ_0 SE $Sol\, \Sigma_0 = \langle\langle v, w \rangle\rangle$.

SE NON CI SONO IN $Sol(\Sigma_0)$ ALTRI VETTORI $\Rightarrow Sol\, \Sigma_0 = \langle\langle v, w \rangle\rangle$
ALTRIMENTI $\exists\, u \in Sol(\Sigma_0)$ TALE CHE $u \neq \alpha v + \beta w \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
CIOE' $\exists\, u \notin$ PIANO GENERATO DA v e w $\Rightarrow$ TUTTA LA RETTA GENERATA DA u, $\langle\langle u \rangle\rangle$, $\subset Sol\, \Sigma_0 \Rightarrow$ LO SPAZIO TRIDIMENSIONALE GENERATO DA u, v, w $(= \langle\langle u, v, w \rangle\rangle)$ E' CONTENUTO IN $Sol(\Sigma_0)$. SE TUTTE LE SOLUZIONI SONO NELLO SPAZIO, CIOE' DEL TIPO $\alpha u + \beta v + \gamma w \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow Sol\, \Sigma_0 = \langle\langle u, v, w \rangle\rangle$.