DEFINIZIONE: Si dice FASCIO di rette l'insieme delle combinazioni lineari di due rette date

14/12/2011 1

$r_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad r_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$\Rightarrow$ il fascio è dato da $\lambda(a_1x + b_1y + c_1) + \mu(a_2x + b_2y + c_2) = 0$

è un insieme di rette: vediamo come sono disposte nel piano.

consideriamo: $\Sigma \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$

per $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad (2) \\ 2 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \quad (1) \end{cases}$

(1) per R.C. il sistema ha soluzione e dim. $Sol\Sigma = \#$ VARIABILI $- rg\Sigma$

dim $Sol\Sigma = 2 - 2 = 0 \Rightarrow r_1 \cap r_2 = \{P\}$ (SI INTERSECANO IN P)

$\Rightarrow$ le coordinate di P annullano l'equazione del fascio

$\Rightarrow$ tutte le rette del fascio passano per P e tale fascio è detto $\boxed{\text{FASCIO PROPRIO}}$ $\boxed{\text{di punto base P}}$

(2) 1°CASO i ranghi della matrice COMPLETA E DELLA MATRICE INCOMPLETA sono entrambi uguali a 1

per R.C. il sistema ha soluzione e dim $Sol\Sigma = 1$

$\Rightarrow r_1 \equiv r_2 \Rightarrow \alpha(a_1x + b_1y + c_1) = 0$

$\Rightarrow$ ho un'unica retta!!

2°CASO: il rango della matrice COMPLETA è aumentato a 2

per R.C. $Sol\Sigma = \emptyset \Rightarrow r_1 // r_2 \Rightarrow$

il fascio può essere scritto come $(a_1x + b_1y)\underbrace{(\lambda + k\mu)}_{\alpha} + \lambda c_1 + \mu c_2 = 0$

$\Rightarrow a_1x + b_1y = \dfrac{-\lambda c_1 - \mu c_2}{\lambda + k\mu}$ LE RETTE DIFFERISCONO SOLO PER IL TERMINE NOTO

$\Rightarrow$ tale fascio è costituito da rette // ed è detto $\boxed{\text{FASCIO IMPROPRIO}}$; la $\boxed{\text{direzione}}$ delle rette di tale fascio è $\boxed{a_1x + b_1y = 0}$

Dato $\lambda(a_1x+b_1y+c_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2)=0$, supposto $\lambda\neq 0$ posso dividere l'equazione per λ (2)

$$\Rightarrow a_1x+b_1y+c_1+\underbrace{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)}_{t}(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

L'equazione diventa più maneggevole, ma in questo modo nel fascio non è più contenuto, in questo caso, la retta $a_2x+b_2y+c_2$ in quanto non è ottenibile per alcun valore di t: QUINDI NELLO SVOLGERE GLI ESERCIZI, SE ADOPERIAMO L'EQUAZIONE CON UN UNICO PARAMETRO, FACCIAMO ATTENZIONE A RECUPERARE LA RETTA PERSA!

SOTTOSPAZI AFFINI DI $\mathbb{R}^3$
- PUNTI
- RETTE
- PIANI

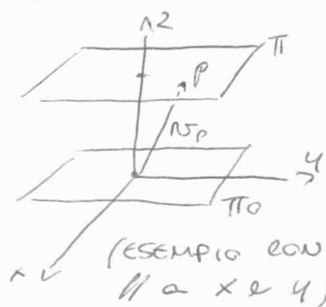
Un piano in $\mathbb{R}^3$ è definito da un'equazione lineare non omogenea $\boxed{ax+by+cz+d=0}$: è un sottospazio affine π

$\Rightarrow \pi = P+\pi_0$ con $P\in\pi$ (punto del piano π) e π_0 direzione di π

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_P\\y_P\\z_P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix} \Rightarrow \text{presa } B_{\pi_0}=\{u,w\}$$

$$x = P + V_{\pi_0} \qquad \Rightarrow V_{\pi_0}=su+tw \quad s,t\in\mathbb{R}$$

(COMBINAZIONE LINEARE s,t = PARAMETRI)



(ESEMPIO CON PIANO // a x e y)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_P\\y_P\\z_P\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}w_x\\w_y\\w_z\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{EQUAZIONE VETTORIALE DEL PIANO}}$

passando al sistema scalare:

$$\begin{cases}x=x_P+su_x+tw_x\\ y=y_P+su_y+tw_y\\ z=z_P+su_z+tw_z\end{cases}$$

$\boxed{\text{EQUAZIONE PARAMETRICA DEL PIANO}}$

<u>Esempio</u> $\pi: x+y+z=1$ dove la sua eq parametrica

- La direzione π_0 di π ha equazione $\Sigma_0: x+y+z=0$

$x=-y-z$

x	y	z
-1	0	1
-1	1	0

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} e \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ sono le soluzioni fondamentali dell'omogenea e formano quindi una base di $\pi_0: B_{\pi_0}=\{v;w\}$

- P è dato da una soluzione particolare del non omogeneo $x=-y-z+1$

x	y	z
1	0	0

$\Rightarrow P=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-s-t \\ y=0+0+t \\ z=0+s+0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-s-t \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$ <u>EQ. PARAMETRICA</u>

<u>Esempio</u> dato un'equazione parametrica di π: $\begin{cases} x=2s-t+1 \\ y=s+2t-1 \\ z=\underbrace{s-t}_{\text{DIREZIONE } \pi_0}\ \underbrace{}_{\text{PUNTO } P} \end{cases} \Rightarrow$

1) Un piano // per $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ha eq: $\pi_1 \begin{cases} x=2s-t+1 \\ y=s+2t \\ z=s-t \end{cases}$

2) RICAVIAMO L'EQUAZIONE CARTESIANA DI π: (RICAVO I PARAMETRI s e t NELLE ULTIME DUE EQ. E LI SOSTITUISCO NELLA PRIMA)

$$\pi: \begin{cases} y=z+t+2t-1 \\ s=z+t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\frac{y-z+1}{3} \end{cases}$$

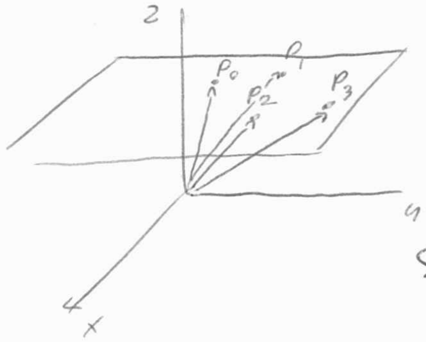
$$s=z+\frac{y-z+1}{3} \Rightarrow s=\frac{2z+y+1}{3}$$

$$= \begin{cases} x=\frac{2}{3}(2z+y+1)-\frac{y-z+1}{3}+1 \\ y \\ y \end{cases} \Rightarrow \underline{3x=5z+y+4} \text{ eq. CARTESIANA}$$

Dati 4 punti in uno spazio (nell'esempio $\mathbb{R}^3$), QUANDO STANNO SULLO STESSO PIANO π?:

se $P_0, P_1, P_2, P_3 \in \pi \Rightarrow V_1 - V_0,\ V_2 - V_0,\ V_3 - V_0$ appartengono alla sua direzione $\pi_0 \Rightarrow$ tali 3 vettori, allora, devono essere linearmente dipendenti $\Rightarrow$ la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix}$$



deve avere $rg = 2$
cioè il $\underline{\det = 0}$ ← CONDIZIONE DI APPARTENENZA A π!

se trasponiamo la matrice 3x3 data:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

questa matrice ha determinante uguale a quello della matrice:

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 & 0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$$ dove imponiamo $\det = 0$

$\Rightarrow$ sostituendo P_0 con $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix}$ imponendo il $\det = 0$ ottengo l'eq. del piano passante per P_1, P_2, P_3 ||

Eq. di una retta in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} \quad \text{con } rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$

EQ. PARAMETRICA: determino una soluzione fondamentale v di M_0 (SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO) e una soluzione particolare ξ (SISTEMA NON OMOGENEO)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ tre punti P_0, P_1, P_2 sono allineati in $\mathbb{R}^3$ se $V_1 - V_0,\ V_2 - V_0$ sono l. dip.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix}$$ deve avere $rg = 1$

Se prendo $P_1 = P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_0}$$

(CON QUESTA IMPOSIZIONE OTTENGO EQ. CARTESIANA)

EQUAZIONE DI UNA RETTA PASSANTE PER DUE PUNTI