30-11-2011

Se $V = \langle\langle v_1, \dots, v_K \rangle\rangle$ $V < \mathbb{R}^n \Rightarrow$ cerchiamo il sistema $\Sigma_0 : Ax = 0$ tale che $V = Sol\,\Sigma_0$

Supponiamo che V sia una retta in $\mathbb{R}^2$, $V = \langle\langle (1,1) \rangle\rangle$

$$V = Sol\,\Sigma_0$$

$$\Rightarrow \Sigma_0 : \quad x - y = 0$$

Il sistema ha una equazione perché lo spazio delle soluzioni ha dimensioni pari ad 1 E QUINDI IL RANGO DEL SISTEMA E' $2-1=1$, in 2 incognite perché siamo in $\mathbb{R}^2$.
Scientificamente, fatte le considerazioni precedenti, si costruisce il sistema generico, in questo caso:

$$\Sigma_0 : \; ax + by = 0$$

e si sostituiscono x e y con ~~i valori~~ le coordinate di un vettore che appartiene al l'insieme delle soluzioni, ad esempio la base $(1,1)$

$$a + b = 0$$

$$a = -b \Longrightarrow -bx + by = 0 \rightarrow -x + y = 0$$

Ed otteniamo la forma in cui si presenta Σ_0

Utilizziamo lo stesso procedimento con il caso $V = \langle\langle v_1, \dots, v_K \rangle\rangle < \mathbb{R}^n$: otteniamo un sistema di k equazioni in n incognite.

$$\Sigma_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo ora a $x_1, \dots, x_n$ le coordinate dei vettori ~~dovarire~~ che generano V.

$$\Sigma_0 : \begin{cases} a_{11}v_1^1 + a_{12}v_1^2 + \dots + a_{1n}v_1^n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}v_k^1 + a_{k2}v_k^2 + \dots + a_{kn}v_k^n = 0 \end{cases}$$

da cui ricava: X_{11} ...

$$B=\begin{pmatrix} [V_1]_B^T \\ [V_2]_B^T \\ \vdots \\ [V_k]_B^T \end{pmatrix}_{k\times n} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_k \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{k\times 1} \Rightarrow rg\, B = r$$

$$BX = 0$$

quindi: $\dim V = r$ con $V = \langle\langle v_1, \dots, v_k \rangle\rangle$

Ma stavamo cercando

$$\Sigma_0 : AX = 0 \quad | V = S_0/\Sigma_0 \quad \Rightarrow \text{SE } \dim V = n - r$$

$$\Rightarrow rg\, A = n - r$$

Dobbiamo quindi determinare le soluzioni fondamentali, ~~cioè~~ di $BX=0$ cioè $n-r$ vettori linearmente indipendenti;
le coordinate di questi vettori vanno sostituite alle incognite di $BX=0$ e in tal modo determiniamo $n-r$ equazioni l. indip. che formano le equazioni di $Ax=0$, ossia di Σ_0.

Vediamo un'altro metodo: SIA $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ UN VETTORE DI $V = \langle\langle V_1, \dots, V_r \rangle\rangle$

$\Rightarrow X = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_r V_r$ CIOE'

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} [V_1]_B \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} [V_2]_B \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r \begin{pmatrix} [V_r]_B \end{pmatrix} \quad \text{con } \{V_1, \dots, V_2\} \text{ base di } V$$

~~Facendo~~ La combinazione lineare dei vettori che costituiscono la base di V DA ORIGINE AD UN ~~otteniamo un~~ sistema di equazioni parametriche; se eliminiamo i parametri, ~~ottenendo~~ ~~le equazioni cartesiane~~, quelle equazioni che otteniamo in cui non compaiono i parametri saranno le equazioni di Σ_0, equazioni cartesiane di Σ_0

OPPURE: POSTO UN VETTORE $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ COME VETTORE DI $V \Rightarrow$

$X = \alpha_1 [V_1]_B + \alpha_2 [V_2]_B + \dots + \alpha_r [V_r]_B \Rightarrow$

Se considero la matrice che ha per colonne i vettori $[V_1]_B, \dots, [V_r]_B$ e il vettore delle incognite X

$$\begin{array}{ccccc} [V_1]_B & [V_2]_B & \dots & [V_r]_B & X \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} | & | & & | & | \\ | & | & & | & | \\ | & | & & | & | \end{pmatrix}_{n \times (r+1)}$$

Poiché X deve essere linearmente $\overbrace{\text{dipente}}^{\text{DAI VETTORI COLONNA } [V_j]_B}$, in quanto é il risultato di una combinazione lineare di $[V_1]_B, \dots, [V_r]_B$, un qualunque minore di ordine $r+1$ deve essere nullo; perciò ponendo a 0 i determinante delle sottomatrici ~~[illegible]~~ di ordine $r+1$ otteniamo le equazioni di Σ_0!

Sia Σ un sistema lineare non omogeneo di n variabili e p equazioni $\Rightarrow \Sigma: A_{p\times n} X_{n\times 1} = B_{p\times 1}$

1) Ha sempre soluzione?

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ \boxed{1=0} \end{cases} \text{ assurdo!}$$

é un sistema impossibile $\Rightarrow$ la risposta è NO!

2) Quando ha soluzione?

Teorema di Rouché-Capelli: un sistema lineare non omogeneo ~~ha soluzione~~ $Ax=B$ ha soluzione $\Leftrightarrow rg\,A = rg(A \vdots B)$ (A = matrice dei coefficienti = matrice INCOMPLETA, mentre $(A \vdots B)$ = matrice completa di Σ, cioè OTTENUTA DA A AGGIUNGENDO LA COLONNA DEI TERMINI NOTI)

Dimostrazione: "$\Rightarrow$" ~~sistema ha soluzione~~ Se il sistema ha soluzione $\Rightarrow \exists (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + \ldots + a_{1n}\tilde{x}_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}\tilde{x}_1 + \ldots + a_{pn}\tilde{x}_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \text{in forma vettoriale}$$

$$\tilde{x}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + \tilde{x}_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \ldots + \tilde{x}_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A = rg(A \vdots B)$$

poiché B è combinazione lineare di $C_1(A), \ldots, C_n(A)$

Dimostrazione "$\Leftarrow$": Viceversa si dimostra a ritroso.

c.v.d

Ad esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rg\,A = 1 \quad e \quad rg(A \vdots B) = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Il sistema non é risolvibile.

Esempio: $\Sigma \begin{cases} x_2 = 3x_3 + 1 \\ x_1 = 2x_3 + 2 \end{cases}$

Dato $\Sigma: AX=B$ ad esso é ~~sempre~~ sempre associato un sistema $\Sigma_0: AX=0$ omogeneo

Si dimostra che l'insieme delle soluzioni di Σ é determinato dall'insieme delle soluzioni di Σ_0 ai cui elementi si somma ~~una~~ una soluzione particolare di Σ; cioé la soluzione generale di Σ é ottenuta sommando la soluzione generale di Σ_0 con una soluz. particolare di Σ

Esempio: $\Sigma: \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \Rightarrow \Sigma_0: \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ $x=-y$

x	y
-1	1
$-s$	s

Soluzione generale di Σ_0 é $(-s, s)$. (PASSANDO AL SISTEMA NON OMOGENEO $x+y=1 \Rightarrow x=-y+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se $y=1$, $(0,1)$ é soluzione particolare di Σ

$\Rightarrow Sol\,\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow Sol\,\Sigma = \left\{ s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

DIMOSTRARE QUESTA AFFERMAZIONE