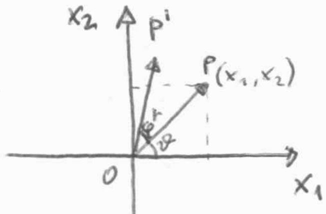
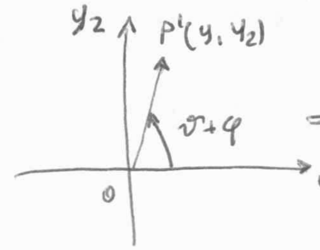
GEOMETRIA 29/02/12



COORDINATE POLARI

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\vartheta \\ x_2 = r\sin\vartheta \end{cases} \xrightarrow[\text{DI ANGOLO } \varphi,\ 0 \le \varphi \le \pi]{\text{DOPO UNA ROTAZIONE}} \begin{cases} y_1 = r\cos(\vartheta+\varphi) \\ y_2 = r\sin(\vartheta+\varphi) \end{cases}$$



$\Rightarrow$

CERCHIAMO LA MATRICE ASSOCIATA AD UNA ROTAZIONE DI ANGOLO φ :

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = r(\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi) \\ y_2 = r(\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\vartheta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = r\cos\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi \\ y_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ y_2 = x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ ROTAZIONE $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \longmapsto (y_1, y_2)$

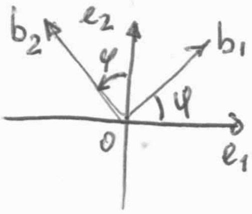
$\hookrightarrow$ matrice associata ad una rotazione nel piano di angolo φ, $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \to (y_1,y_2)$

CONSIDERIAMO ORA UN CAMBIAMENTO DI BASE IN $\mathbb{R}^2$: L'APPLICAZIONE AD ESSA ASSOCIATA È:

$$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2$$
$$v \longrightarrow \mathrm{Id}(v) = v$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

troviamo la matrice associata all'identità



troviamo prima la base $\mathcal{B}_2$ RUOTANDO LA BASE CANONICA DI UN ANGOLO φ CON $0 \le \varphi \le \pi$.

$$\Rightarrow \mathcal{B}_2 = \left\{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}} \right\}$$

ora dobbiamo esprimere i vettori $\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ e $\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_2$:

$$\mathrm{id}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi = 1 \\ \alpha_1\sin\varphi + \alpha_2\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2\cos\varphi^2 + \alpha_2^2\sin^2\varphi - 2\alpha_1\alpha_2\cos\varphi\sin\varphi = 1 \\ \alpha_1^2\sin^2\varphi + \alpha_2^2\cos^2\varphi + 2\alpha_1\alpha_2\sin\varphi\cos\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_1 = -\dfrac{\alpha_2\cos\varphi}{\sin\varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_2^2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} + \alpha_2^2 = 1 \\ \alpha_2^2 = \sin^2\varphi \end{cases}$$

$\varphi \ne 0, \pi$

$$\begin{cases} // \\ \alpha_2 = \begin{cases} \sin\varphi = \alpha_1 = -\cos\varphi \\ -\sin\varphi = \alpha_1 = \cos\varphi \end{cases} \end{cases}$$

se $\alpha_1 = -\cos\varphi \Rightarrow \mathrm{id}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ se $\alpha_1 = \cos\varphi$ $\mathrm{id}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{pmatrix}$

per scrivere la matrice $[\mathrm{id}]_C^{B_2}$ dobbiamo trovare ancora α_1 e α_2 della combinazione lineare $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$: SCRIVERE LA MATRICE $[\mathrm{id}]_C^{B_2}$ FINENDO L'ESERCIZIO

nel caso in cui $\varphi = 0$ il sistema di riferimento ruota di zero gradi $\Rightarrow$ la matrice associata a questa applicazione è la matrice identità

NEL CASO IN CUI $\varphi = \pi \Rightarrow \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

E LA MATRICE $[id]_{e}^{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

Abbiamo analizzato la matrice associata ad una rotazione e definito come la matrice associata ad una trasformazione lineare riassume tutte le proprietà dell'applicazione.
Si possono considerare rotazioni che lasciano invariata la figura: esse sono spesso chiamate "simmetrie per rotazione": in natura si trovano numerosi esempi di simmetrie di rotazione: i cristalli di neve hanno, in genere, una simmetria di rotazione di 60°, cioè la loro immagine rimane la stessa se viene ruotata di $\frac{\pi}{3}$; questa simmetria dipende dalla struttura del reticolo cristallino dell'acqua allo stato solido, che è esagonale: il fiocco di neve si forma su un cristallo originale per successive aggiunte di altre combinazioni con la stessa simmetria, ma di dimensione variabile.
Molti organismi viventi hanno simmetrie per rotazione. Ad esempio la medusa: ha il corpo attraversato da canali radiali in # di 4 o multipli di 4 con tentacoli posti ad intervalli regolari....: quindi la sua figura rimane invariata in seguito a rotazioni di angoli pari a 2π diviso per 4, 8, 12, cioè $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.

Vediamo altre applicazioni:
La "Computer graphica" è un insieme di tecniche che permettono di modificare le immagini digitali, geometricamente (il più delle volte), nel formato vettoriale (come pdf). Ad esempio l'operazione di "zoom" si ottiene con trasformazioni associate a matrici $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$ che corrispondono ad un ingrandimento, se $\gamma > 1$, ed un rimpicciolimento, se $0 < \gamma < 1$, dell'immagine.
Le matrici di rotazione R_ϑ (in particolare quelle per $\vartheta = \pm \pi/2, \pm \pi$) sono molto utilizzate per "raddrizzare" immagini; così come $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ riflette specularmente l'immagine rispetto all'asse y.

In tutti questi casi il programma di visualizzazione dell'immagine applica la trasformazione geometrica ai dati vettoriali e solo successivamente riproduce il disegno su schermo. Nessun dettaglio viene cancellato e quindi l'immagine rimane di alta qualità. La scala e l'orientazione vengono adoperati dei programmi di visualizzazione.

Nel formato raster queste operazioni sono meno naturali. Ad esempio nel ridurre le dimensioni di un'immagine a metà, ogni pixel ne sostituisce 4 e l'immagine è meno definita.

Supponiamo di voler ruotare l'immagine di $\frac{\pi}{4}$: dove vengono spostati i pixel di coordinate $(1500,1500)$ e $(1501,1501)$?

$$R_{\frac{\pi}{4}}(\ )=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}1500 - \frac{\sqrt{2}}{2}1500 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}1500 + \frac{\sqrt{2}}{2}1500 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1501 \\ 1501 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,1501-\sqrt{2}\,1501 \\ \sqrt{2}\,1501+\sqrt{2}\,1501 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3002\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Poiché i pixel sono coordinate dell'immagine, allora devono avere coordinate intere, quindi nessun pixel viene trasformato esattamente in un altro, ma ad un pixel corrispondono più trasformati possibili.
Questo è un problema, ma ogni soluzione cambia il contenuto dell'immagine in modo irreversibile.