Teorema di Grassmann

Dato uno spazio vettoriale V e due sottospazi U e W di V $\Rightarrow$
$\dim U + \dim W \equiv \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$.

Dimostrazione

Siano $\dim V = n$, $\dim U = p$, $\dim$ di $W = q$, $\dim(U \cap W) = K$
$p, q, K \leq n$; $K \leq p, q$.

$B_{U \cap W}$ base di $U \cap W$: $B_{U \cap W} = \{v_1, \dots, v_K\}$ completiamo $\{v_1, \dots v_K\}$ ad una base di U : $B_U = \{v_1, \dots, v_K, u_1 \dots u_{p-K}\}$ e analogamente completiamo l'insieme $\{v_1, \dots v_K\}$ fino ad ottenere una base di W che chiamiamo $B_W = \{v_1 \dots v_K, w_1 \dots w_{q-K}\}$

Sia ora $v \in U+W \Rightarrow \exists\ u \in U$ e $w \in W$ / $v = u + w$
$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_K v_K + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-K} u_{p-K} + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_K v_K + \delta_1 w_1 + \dots + \delta_{q-K} w_{q-K} =$ (sommando i termini simili:)
$\varepsilon_1 v_1 + \dots + \varepsilon_K v_K + \beta_1 u_1 + \dots \beta_{p-K} u_{p-K} + \delta_1 w_1 + \dots \delta_{q-K} w_{q-K} \Rightarrow$

I vettori $v_1, \dots, v_K, u_1, \dots, u_{p-K}, w_1, \dots, w_{q-K} \rightarrow$ generano $U + W$
se dimostro che tali elementi sono linearmente indipendenti allora essi formeremo una base di $U + W$ ed allora essendo tali vettori $K + p - K + q - K = p + q - K \rightarrow \dim U + W = p + q - K$

$\Rightarrow$ DIMOSTRIAMO CHE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ Considero una combinazione lineare dei vettori = VETTORE NULLO

$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_K v_K + \mu_1 u_1 + \mu_{p-K} u_{p-K} + \nu_1 w_1 + \nu_{q-K} w_{q-K} = 0$ ⊛

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots \lambda_K v_K + \mu_1 u_1 + \dots \mu_{p-K} u_{p-K}}_{\in U} = \underbrace{-\nu_1 w_1 - \dots - \nu_{q-K} w_{q-K}}_{\in W}$$

tale vettore si trova in $U \cap W$

COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI BASE DI $U \cap W$

$-\nu_1 w_1 - \dots - \nu_{q-K} w_{q-K} \in U \cap W \Rightarrow \nu_1 w_1 - \dots - \nu_{q-K} w_{q-K} = \rho_1 v_1 + \dots + \rho_K v_K \Rightarrow$

$0 = \nu_1 w_1 + \dots + \nu_{q-k} w_{q-k} + \rho_1 v_1 + \dots + \rho_k v_k$ questa è una COMBINAZIONE LINEARE DI UNA BASE DI W, ~~questo comporta~~ quindi i vettori sono linearmente indipendenti.

E I COEFFICIENTI SONO DUNQUE NULLI $\Rightarrow \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_{q-k} = 0$

Sostituendo quanto trovato nell'espressione di prima: ⊛ SI OTTIENE

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_1 u_1 + \dots + \mu_{p-k} u_{p-k}}_{} = 0$$

i vettori sono base di U, pertanto sono linearmente indipendenti E QUINDI $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \mu_1 = \dots = \mu_{p-k} = 0$

~~i vettori~~ Essendo nulli tutti i coeff della combinazione lineare ⊛ questo implica che $\underbrace{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, \mu_{p-k}, w_1, \dots, w_{q-k}}$ sono linearmente indipendenti cvd.

Esempio

1) Siano U e W due piani di $\mathbb{R}^3$, possono intersecarsi solo nella origine? Per la formula di Grassmann $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W -$ $\dim U + W$

$\dim(U \cap W) = 2 + 2 - 3$ → al massimo 2 piani in $\mathbb{R}^3$ generano TUTTO $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 1 \rightarrow$ quindi due piani che si intersecano hanno almeno una retta in comune.

NB $\dim U + W$ può essere 3 (in $\mathbb{R}^3$) o 2 (se $U \cong W$)

La risposta alla domanda iniziale può essere solo No!

2) Siano U e W due piani in $\mathbb{R}^4$, a cosa corrisponde la loro intersezione? Possono intersecarsi nell'origine solo?

3

~~Metodo rapido per determinare dim (U + W)~~

~~Si prendono i vettori delle due basi e li si mette in una matrice e si calcola il rango per colonna di tale matrice~~.

- Se sono date le basi di U e W per determinare $\dim(U+W)$ posso mettere in una matrice i vettori delle due basi come vettori colonne e poi cercarne il rango

Esempio $B_U \{u_1, u_2\}$ $B_W \{w_1, w_2, w_3\}$ con U e W sottospazi di $V \in \mathbb{R}^5$

La matrice cercata sarà: $A \in M_{5\times5}$

$rg\,A$ può essere: $\to$ minimo 3 ($w_{1,2,3}$ sono lin. indipendenti)

$\to 4$

$\to 5$

ma quali tra essi sono linearmente indipendenti?

$$A = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & u_1 & u_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

SUPPONIAMO CHE si riduce la matrice A in forma a gradini canonica

esempio

$$A' = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & v & e_4 \\ & & & & * \\ & & & & * \\ & & & & * \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

$$= A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & c & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I primi 3 + il 5° sono linearmente indipendenti quindi conosciamo le basi di $(U+W)$: $B_{U+W} \{w_1, w_2, w_3, u_2\}$

- Cerchiamo una base di $(U \cap W)$, date B_U e B_W!

~~Nella matrice in forma canonica le colonne linearmente dipendenti danno informazioni~~

secondo Grassmann $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$

$\dim(U \cap W) = 2+3-4 = 1$ quindi è generato da un solo vettore (in questo caso): in particolare il vettore v della matrice A' È DATO DA:

~~[illegible]~~ $v = ae_1 + be_2 + ce_3 \Rightarrow$ NELLA MATRICE A AVREMO:

$u_1 = aw_1 + bw_2 + cw_3 \Rightarrow u_1$ genera $U \cap W$ PERCHÈ $u_1 \in U$ PER IPOTESI E $u_1 \in W$ PERCHÈ COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DI W

In generale supponiamo di avere una matrice

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 \cdots w_k & u_1 \cdots u_p \\ | & | & | \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ccccccccc} e_1 & e_2 & e_k & v_1 & v_2 & \cdots & e_{k+1} & \cdots v_{r+1} & e_{k+2} \cdots \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & & & & & \\ \vdots & \vdots & 1 & \alpha_k & \beta_k & 0 & \gamma_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

prendiamo ad esempio

v_{r+1} = combinazione lineare dei vettori $e_1, \dots e_{k+1}$

$$v_{r+1} = \varphi_1 e_1 + \dots \varphi_{k+1} e_{k+1}$$

$$u_{r+2} = \varphi_1 w_1 + \dots \varphi_k w_k + \varphi_{k+1} u_{r+1}$$

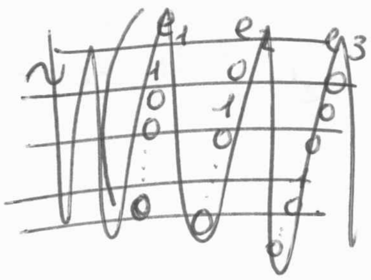
$$\Rightarrow \boxed{u_{r+2} - \varphi_{k+1} u_{r+1} = \varphi_1 w_1 + \varphi_2 w_2 + \dots \varphi_k w_k}$$

questo vettore STA nell'intersezione $U \cap W$

esempio

$A \in M_{8\times 7}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} | & | & | & | & | & | & | \end{pmatrix}_{8\times 7} \end{array} \sim$$



$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & v_1 & e_5 & v_2 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_{U\cap W} = \{u_1 + 2u_2 + 3u_3, -u_1 - u_2 - u_3\}$$

Se è dato un sottospazio vettoriale W k-dimensionale in uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$ mediante una sua base

$W = \langle\langle w_1, \dots w_k \rangle\rangle \Rightarrow$ come è fatto il sistema lineare di cui W è spazio delle soluzioni?

- Sappiamo che è Omogeneo (abbiamo a che fare con sottospazi vettoriali)
- Il numero di variabili sarà n (siamo in $\mathbb{R}^n$)
- il rango è uguale a $n-k$

$$\Sigma_0 \quad AX = 0 \quad \text{dove } A \in M_{n-k \times n} \text{ e } X \in M_{n \times 1} \text{ (vettore coordinate)}$$

<u>trovare A</u>: