GEOMETRIA 28/10/11

Σ' sistema ottenuto da Σ mediante le operazioni elementari riga

proposizione: $Sol(\Sigma') = Sol(\Sigma) \Leftrightarrow \left(Sol(\Sigma') \subseteq Sol(\Sigma) \text{ e } Sol(\Sigma) \subseteq Sol(\Sigma') \right)$

SIA Σ' OTTENUTO DA Σ MEDIANTE LA SOSTITUZIONE DI UN'EQUAZIONE CON LA SOMMA DELLA STESSA EQUAZIONE CON UN'ALTRA

$$\Sigma \begin{cases} R_1 = 0 \\ R_2 = 0 \\ \vdots \\ R_p = 0 \end{cases} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1 = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j - b_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \Sigma' : \begin{cases} R'_1 = 0 \\ \vdots \\ R'_i = 0 \\ \vdots \\ R'_p = 0 \end{cases} = \begin{cases} R_1 = 0 \\ \vdots \\ R_i + R_k = 0 \\ \vdots \\ R_p = 0 \end{cases}$$

DIMOSTRIAMO CHE $Sol(\Sigma) \subseteq Sol(\Sigma')$

$$\text{Sia } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Sol(\Sigma) \Rightarrow \begin{cases} R_1(\alpha) \equiv 0 \\ R_2(\alpha) \equiv 0 \\ R_i(\alpha) \equiv 0 \\ R_k(\alpha) = 0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \Sigma' \begin{cases} R_i(\alpha) \equiv 0 \\ \vdots \\ R'_i = (R_i + R_k)(\alpha) = R_i(\alpha) + R_k(\alpha) \equiv 0 \\ \vdots \\ R_p(\alpha) \equiv 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha \in Sol(\Sigma')$

RICORDO CHE:
($a \equiv \beta$ simbolo di identicamente UGUALE ~~nullo~~, la uguaglianza ~~proposizione~~ è vera sempre)

Per dimostrare che $Sol(\Sigma') \subseteq Sol(\Sigma)$ bisognerebbe TROVARE l'inversa di ogni operazione elementari riga

$Sol(\Sigma') \subseteq Sol(\Sigma)$: la dimostrazione di questa inclusione RICALCA direttamente la dimostrazione dell'inclusione precedente osservando che le operazioni "inverse" delle operazioni elementari riga sono ancora le <u>stesse</u> operazioni elementari riga

DEFINIZIONE: due sistemi lineari di p equazioni ed n incognite con lo stesso insieme delle soluzioni sono detti EQUIVALENTI; PER L'EQUIVALENZA USIAMO IL SIMBOLO "$\sim$"

ESEMPIO:
sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni e 3 incognite

$$\begin{cases} 3x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Passo 1: scambio la prima equazione con la seconda in modo da avere nella nuova prima equazione la prima incognita

$$\sim \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

passo 2: elimino la prima incognita della prima equazione dalle restanti equazioni attraverso la 2ª e la 3ª operazione elementare riga

$$\underset{\sim}{R_3' = \tfrac{1}{3}R_1 - R_3} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

passo 3: moltiplico la 3ª equazione per lo scalare -3

$$\underset{\sim}{R_3'' = -3R_3'} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

passo 4: scambio la ~~prima~~ seconda equaz. con la terza

$$\begin{matrix} R_2''' = R_3'' \\ \sim \\ R_3''' = R_2'' \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_3 = 0 \end{cases}$$

forma a gradini

DEFINIZIONE: Si chiama PIVOT il primo coefficiente non nullo di ogni equazione del sistema ridotto a gradini

DEFINIZIONE: Si dice **RANGO** del sistema il numero dei PIVOT del sistema stesso RIDOTTO A GRADINI

ESEMPIO: il sistema in esame ha rango 3 $(rg\,\Sigma = 3)$

COME SI VEDE FACILMENTE DALLE EQUAZIONI DEL SISTEMA RIDOTTO A GRADINI

- tutte le equazioni del sistema ~~(nella forma a gradini)~~ in esame sono risolubili; di conseguenza il sistema é risolubile ed avrá un insieme di soluzioni NON VUOTO: $Sol(\Sigma) \neq \emptyset$
- inoltre sappiamo che la soluzione del sistema in esame e' UNICA perche' per determinare "quante" soluzioni ci sono basta adoperare questa formula:

$$\boxed{\infty^{n - rg\Sigma}}, \quad n = \#\text{ variabili DEL SISTEMA}$$

che in questo esercizio dá $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$

riamo ora la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=2 \\ x_2+2x_3=7 \\ 3x_3=0 \end{cases} \overset{R_3^{III}=\frac{1}{3}R_3^{III}}{\sim} \begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=2 \\ x_2+2x_3=7 \\ x_3=0 \end{cases}$$

ra "risaliamo" eliminando la variabile dell'ultima equazione dalle equazioni CHE LA PRECEDONO NEL SISTEMA

$$\overset{R_2^{V}=R_2^{IV}-2R_3^{IV}}{\sim} \begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=2 \\ x_2 \qquad =7 \\ x_3=0 \end{cases} \sim$$

$$\overset{R_1^{VI}=R_1^{V}+2R_3^{V}}{\sim} \begin{cases} x_1+5x_2 \qquad =2 \\ x_2 \qquad =7 \\ x_3=0 \end{cases}$$

nfine eliminiamo la variabile della a equazione dalla prima equazione

$$\overset{R_1^{VII}=R_1^{VI}-5R_2^{VI}}{\sim} \begin{cases} x_1 \qquad =-33 \\ x_2 \qquad =7 \\ x_3=0 \end{cases} : \boxed{\text{forma canonica DEL SISTEMA}}$$

forma canonica = quando "~~[illegible]~~" i pivots SONO RIDOTTI A "1" NELLE EQUAZIONI CHE LI CONTENGONO, MENTRE NELLE ALTRE EQUAZIONI I COEFFICIENTI DELLE INCOGNITE CORRISPONDENTI AI PIVOTS, SONO NULLI

MATRICE: tabella ordinata in righe e colonne di numeri reali

- formiamo una matrice con i coefficienti delle variabili delle equazioni del sistema: ED I TERMINI NOTI

$$\begin{cases} 3x_3=0 \\ x_1+5x_2-2x_3=2 \\ \frac{1}{3}x_1+2x_2=3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2 & 0 & 3 \end{array}\right)_{3\times 4}$$

La matrice ha tre righe e quattro colonne quindi sarà una matrice 3×4

---

risolviamo il sistema Σ SEGUENTE, LINEARE DI 3 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3=3 \\ x_1-2x_2-x_3=3 \end{cases}$$

formiamo la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

DEFINIZIONE: Si dicono equivalenti due matrici associate a sistemi equivalenti

ESEGUIAMO LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA SUI COEFFICIENTI DELLE EQUAZIONI

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{R_3=R_3-R_1}{\overset{R_2=R_2-2R_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{*}{\overset{R_3=R_2-R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

*consideriamo la sotto matrice $\left(\begin{array}{cc:c} -3 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \end{array}\right)$

moltiplico per $-\frac{1}{3}$ la seconda riga
e moltiplico per $\frac{1}{4}$ la terza riga

$$\underset{R_3=\frac{1}{4}R_3}{\overset{R_2=-\frac{1}{3}R_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{R_2=R_2+R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

dobbiamo ottenere uno zero sopra il PIVOT della seconda riga quindi operiamo una sottrazione tra la prima e la seconda riga

$$\overset{R_1=R_1-R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

- riscriviamo infine il sistema associato alla matrice:

$$\Sigma' \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \\ x_3=0 \end{cases}$$

ABBIAMO COSÌ LA SOLUZIONE $\alpha=(1,-1,0)$