28/03/2011

dati: U sottospazio di V e $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

$\Rightarrow U^{\perp} = \{v \in V / F(v,u) = 0 \ \forall u \in U\}$ è sottospazio di V

Cerchiamo la $\dim U^{\perp}$: per il TH DI GRASSMAN $\dim U + \dim U^{\perp} - \dim U \cap U^{\perp} = \dim V$

siano $\dim U = k$, $\dim V = n$

quando $\dim U \cap U^{\perp} > 0$?

$U \cap U^{\perp} = \{u \in U / F(u,w) = 0 \ \forall w \in U\} \Rightarrow$ deve essere verificato anche $F(u,u) = 0$

$\Rightarrow$ $v \in U \cap U^{\perp} \Leftrightarrow v$ è ~~isotropo~~ ISOTROPO

$\Rightarrow \dim U \cap U^{\perp} > 0$ se $\exists$ in U vettori F-isotropi

$\Rightarrow$ se F è priva di vettori isotropi $\Rightarrow \dim U^{\perp} = n - k$ e $U \oplus U^{\perp} = V$

$\Rightarrow U^{\perp}$ è detto complemento ortogonale di U e da quanto visto per una F simmetrica priva di vettori isotropi, ogni vettore dello spazio V può essere decomposto nella somma di due vettori: uno $\in$ ad un sottospazio dato e l'altro nel suo complemento ortogonale relativamente ad F

Proposizione

Data una forma bilineare simmetrica $F: V \times V \to \mathbb{R}$, priva di vettori isotropi $\Rightarrow$ due vettori F-ortogonali sono lin. indipendenti

Dimostrazione 1 (NON CONCLUSA)

Siano $u, w \in V$ F-ortogonali cioè $F(u,w) = 0 \Rightarrow$ presa $\alpha u + \beta w = 0$

$F(\alpha u + \beta w, \alpha u + \beta w) = 0$

SVILUPPATA SECONDO LA PRIMA COMPONENTE:

$\alpha F(u, \alpha u + \beta w) + \beta F(w, \alpha u + \beta w) = \alpha^2 F(u,u) + \alpha\beta \overset{0}{F(u,w)} + \alpha\beta \overset{0}{F(w,u)} + \beta^2 F(w,w)$

$= \alpha^2 F(u,u) + \beta^2 F(w,w)$: NON POSSIAMO DIRE NULLA SE NON METTIAMO ALTRE IPOTESI SU F $\Rightarrow$ DIAMO UNA NUOVA

Dimostrazione 2 (PER ASSURDO)

Se $w = ku$ $\quad F(u,w) = \underline{0} = F(u, ku) = \underline{k F(u,u)}$ ASSURDO

$k \neq 0$, $F(u,u) \neq 0 \Rightarrow u, w$ sono l. indip.

c.v.d

orto...

...ti.

...le se è formato

F-ortonormali se sono

...$w)) = 1$

F-ortonormale se è formato da vettori

simmetrico $F: V \times V \to \mathbb{R}$, non nulla

non F-isotropo

$\exists\, u, w \in V \mid F((u,w)) \neq 0$

$\in V$ e calcolo $F((\alpha u + \beta w, \alpha u + \beta w)) =$

$,w)) + \beta\alpha F((w,u)) + \beta^2 F((w,w)) =$

$F((u,w)) + \beta^2 F((w,w))$ ... $F((u+w, u+w)) = F((u,u))$

valore $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow F((u+w, u+w)) \neq 0$

$\frac{F((u+w, u+w)) - F((u,u)) - F((w,w))}{2}$

uno fra $u+w, u, w$ non è isotropo

...ne

$: V \times V \to \mathbb{R}$ simmetrico, non nulla

F-ortogonale che moltiplicano $B\perp$

...STRAZIONE

induzione sulla dimensione di V

...lica per $n = 1$ $\exists$ sempre una bas...

vero la proposizione f...

per $\dim V = n$

$V = n+1$ e

$\Rightarrow$ considero $U = \langle\langle u \rangle\rangle \Rightarrow$ posso trovare $U^\perp$ e $U \oplus U^\perp = V$
perché U non contiene vettori F-isotropi diversi dal vettore nullo
infatti ogni vettore di U può essere visto come αu
$\Rightarrow F(\alpha u, \alpha u) = \alpha^2 F(u,u) \neq 0$ se $\alpha \neq 0$.

$\Rightarrow \dim U^\perp = (n+1) - 1 = n$
$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva per $U^\perp$ posso dare una base
F-ortogonale $B_{U^\perp} = \{w_1 \dots w_n\}$
$\Rightarrow \{w_1 \dots w_n, u\}$ è base di V, F-ortogonale

Corollario
Possiamo sempre avere in V una base F-ortonormale se F simmetrica
non nulla priva di vettori isotropi, definita positiva
Si fa $B_\perp = \{w_1 \dots w_n\}$.
$\Rightarrow F((w_j, w_j)) > 0 \quad \forall j = 1, \dots n$
$\Rightarrow$ considero l'insieme $\left\{ \frac{w_1}{\sqrt{F((w_1,w_1))}}, \frac{w_2}{\sqrt{F((w_2,w_2))}} \dots \frac{w_n}{\sqrt{F((w_n,w_n))}} \right\}$

$\Rightarrow F\left(\left(\frac{w_j}{\sqrt{F((w_j,w_j))}}, \frac{w_j}{\sqrt{F((w_j,w_j))}}\right)\right) = \frac{1}{F((w_j,w_j))} \cdot F((w_j,w_j)) = 1 \quad \forall j = 1, \dots n$