Applicazione lineare $L : V \to W$

V, W spazi vettoriali $\dim V = n$ $\dim W = K$

$\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$ basi negli spazi vettoriali 27/02/2012

$\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$; $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_K\}$

Indichiamo con $[L]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$ la matrice associata ad L nelle basi $\mathcal{B}_V$ e $\mathcal{B}_W$

Essa è ottenuta in questo modo:

Considerando i vettori di $\mathcal{B}_V$ e trasform~~arli~~andoli con L, per poi scrivere I TRASFORMATI nella base $\mathcal{B}_W$.

Quindi:

Troviamo: $L(v_j) = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \dots + a_{Kj} w_K$

per $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Kj} \end{pmatrix}$ forma la j-esima colonna di $[L]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$

27/02/2012 (2)

Esempio $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y,z) \to (x+y, -x-y+z)$

$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \right\}$

$L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $L\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}+2a_{21}\\-2a_{11}-a_{21}\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a_{11}+2a_{21} = 1 \\ -2a_{11}-a_{21} = -1 \end{cases}$

per sostituzione

$\begin{cases} a_{11} = -2a_{21}+1 \\ -2+3a_{21} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ a_{21} = \frac{1}{3} \end{cases}$

$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

poiché $L\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = L\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

27/02/2012 (3)

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{13}+2a_{23}=0 \\ -2a_{13}-a_{23}=1 \end{cases}$$

Sostituzione

$$\begin{cases} a_{13} = -\frac{2}{3} \\ a_{23} = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad [L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

L'APPLICAZIONE NON PUÒ ESSERE BIETTIVA: INFATTI

Per il Teorema delle dimensioni

$$\dim(\text{dominio}(L)) = \dim \operatorname{Ker} L + \dim \operatorname{Im} L$$

Se L fosse iniettiva $\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L = 0 \Rightarrow$

$$\dim(\text{dom}(L)) = \dim \operatorname{Im} L$$

Se L fosse suriettiva $\operatorname{Im} L \equiv \text{Codominio}(L)$

Se biettiva quindi $\dim(\text{dom}(L)) = \dim(\text{codom}(L))$

MENTRE QUESTA APPLICAZIONE HA $\dim(\text{Dom}(L)) \neq \dim(\text{codominio}(L))$

RIGUARDO L, posso asserire:

$$\operatorname{Im} L = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle \text{ perche?}$$

in generale:

$L(v) \in \operatorname{Im} L$ se $v \in \text{dominio}(L)$ $\left[L: V \to W \quad \dim V = n \quad \dim W = K \right]$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

27/02/2012 (4)

$L(v) = L(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \dots + \alpha_n L(v_n)$

Quindi effettivamente

$Im\, L = \langle\langle L(v_1), \dots, L(v_n) \rangle\rangle$

Trovo fra $(L(v_1), \dots, L(v_n))$ quelli linearmente indipendenti, essi formano una base di $Im\, L$

Tornando al caso particolare

$$[L]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\dim Im\, L = 2$ poichè $rg\left([L]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}\right) = 2$

quindi L è suriettiva

poichè $\mathbb{R}^2 \equiv Im\, L$

Per teorema delle dimensioni

Dim Dominio$(L) = \dim Ker\, L + \dim Im\, L$

quindi

$\dim Ker\, L = 1 \Rightarrow L$ non è iniettiva

02/2012 (5)

$\operatorname{Ker} L = \{ v \in V \mid L(v) = 0 \}$:   IN GENERALE :

e le basi B_V e $B_W \Rightarrow [L(v)]_{B_W} = [L]^{B_W}_{B_V} \cdot [v]_{B_V} =$

$$\underbrace{[L]^{B_W}_{B_V}}_{k\times n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{k\times 1} ;$$

NELL'ESEMPIO, SUPPONIAMO DI PRENDERE LE BASI CANONICHE $\mathcal{C}$ NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO ⇒

umo che:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = [L]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

27/02/2012 ⑥

Trovo l'equazione analitica partendo dalla matrice associata a L:

Considero: $[L(v)]_{\mathcal{B}_W} = [L]^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V} \cdot [v]_{\mathcal{B}_V}$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3 = y_1 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = y_2 \end{cases}$$

$$L\,(\mathbb{R}^3, \mathcal{C}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{C})$$

$$(x_1, x_2, x_3) \to \left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3,\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)$$

ma, se $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ È LA BASE CHE PRENDIAMO IN $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$

$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to$ diventa la 1^a colonna di $[L]^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_V}$

$$[L]^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{C}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE:
Data $L : (\mathbb{R}^n, \beta_1) \to (\mathbb{R}^n, \beta_2)$ Biettiva $\Rightarrow \exists\, L^{-1} : (\mathbb{R}^n, \beta_2) \to (\mathbb{R}^n, \ldots$

$$[L^{-1}]_{\beta_2}^{\beta_1} = \left([L]_{\beta_1}^{\beta_2}\right)^{-1}$$

L'elemento neutro della composizione è:

$$id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow L^{-1} \stackrel{\text{È DEFINITA IN QUESTO MODO:}}{:} L^{-1} \circ L = L \circ L^{-1} = id$$
$$x \to x$$

per le matrici $A^{-1} / A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

$$L^{-1} \circ L \; (\mathbb{R}^n, \beta_1) \to (\mathbb{R}^n, \beta_1) \qquad [L^{-1} \circ L]_{\beta_1}^{\beta_1} = [id]_{\beta_1}^{\beta_1} = I$$
$$x \longrightarrow x$$

$$[L^{-1} \circ L]_{\beta_1}^{\beta_1} = [L \circ L^{-1}]_{\beta_1}^{\beta_1}$$

$$[L^{-1}]_{\beta_2}^{\beta_1} \cdot [L]_{\beta_1}^{\beta_2} = I$$

$$[L^{-1}]_{\beta_2}^{\beta_1} = \left([L]_{\beta_1}^{\beta_2}\right)^{-1}$$

c.v.d.