(1)

26/3/2012

Definizione 1)

Forma bilineare simmetrica

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad F((v,w)) = F((w,v)) \ \forall v,w \in V$

Forma bilineare anti-simmetrica

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ $\quad F((v,w)) = -F((w,v)) \ \forall w,v \in V$

Fissata una base $\mathcal{B}_V$, la matrice $[F]_{\mathcal{B}_V}$ associata a F antisimmetrica è a sua volta antisimmetrica; cioè

Posta $[F]_{\mathcal{B}_V} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \Rightarrow a_{ji} = -a_{ij} \ \forall i,j$

Definizione 2)

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ è detta "alternante" se $F((v,v)) = 0 \ \forall v \in V$

Si dimostra che ogni forma bilineare reale è alternante se è antisimmetrica E VICEVERSA; INFATTI

Se F è reale antisimmetrica $\Rightarrow$ dovendo verificare che $F((v,v)) = -F((v,v)) \ \forall v \in V$ ed essendo $F((v,v))$ un numero reale, per forza $F((v,v)) = 0$

Definizione 3)

Se il rango di una forma bilineare F è max, allora
F è detta "non degenere".
Sarà "degenere" se il rango di F non è max

Definizione 4) DATA UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA F

Due vettori NON NULLI v e $w \in V$ si dicono coniugati rispetto a F
(sono detti anche "F-coniugati" o "F-ortogonali") se

$$F((v,w))=0$$

Definizione 5)

Data F forma bilineare simmetrica si dice che
v è F-isotropo se $F((v,v))=0$, (con $v \neq 0$).

26/3/2012

Data F forma bilineare simmetrica e $\tilde{v} \in V$, possiamo cercare il sottoinsieme di V ad esso F-coniugato.
Tale insieme si indica con $\tilde{v}^{\perp} = \{ w \in V \mid F((\tilde{v}, w)) = 0 \}$

Esempio:

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\underset{[v]_B}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}, \underset{[w]_B}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} \right) \mapsto x_1 y_2 + y_1 x_2 = F((v, w))$$

F è bilineare poichè la sua espressione analitica è un polinomio di 2° $\underbrace{\text{grado}}_{\text{omogeneo}}$ nelle coordinate degli spazi vettoriali

$$F((w, v)) = F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = y_1 x_2 + x_1 y_2$$

Siccome $F((v, w)) = F((w, v))$ F è simmetrica.

Altro metodo per verificare simmetria: COSTRUIAMO LA MATRICE

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} F((e_1, e_1)) & F((e_1, e_2)) \\ F((e_2, e_1)) & F((e_2, e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ che è simmetrica

Cerco i VETTORI F-isotropi

Vista la 2^a dimostrazione della simmetria DI F si nota che $F((e_1, e_1)) = F((e_2, e_2)) = 0$ quindi e_1 e e_2 sono F-isotropi.

Trovo gli altri:

dato $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{F((}\ 2x_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 0$$

Pertanto, tutti i vettori che si trovano sugli assi x_1, x_2 di $\mathbb{R}^2$ sono F-isotropi

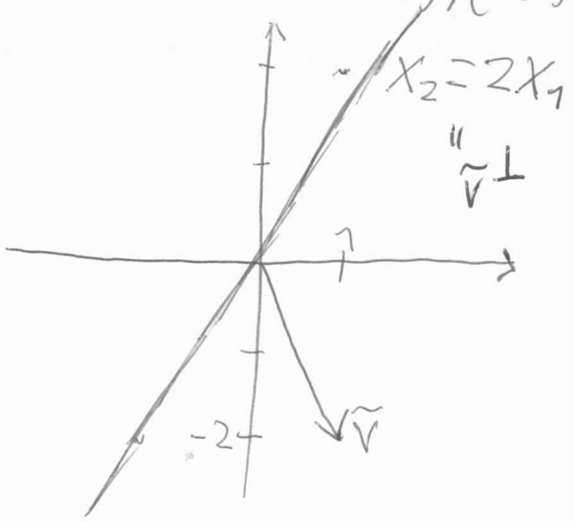
Ora, dato $\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ cerco tutti i vettori ad esso F-ortogonali

$\tilde{v}^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid F((w, \tilde{v})) = 0 \}$ $\quad w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$F((w, \tilde{v})) = F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = -2x_1 + x_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 2x_1$$



26/3/2012

Data $F: V\times V \to \mathbb{R}$ bilineare simmetrica e $W < V \Rightarrow W^\perp = \{v \in V \mid F((v,w)) = 0 \ \forall w \in W\}$
(con V n-dimensionale)

Fissata $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\} \Rightarrow w \in W$ è dato da $w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k$

$F((v,w)) = F((v, \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_k w_k)) =$

$= \alpha_1 F((v, w_1)) + \alpha_2 F((v, w_2)) + \dots + \alpha_k F((v, w_k)) = 0$

Questo è uguale a 0 se $F((v, w_j)) = 0 \ \forall j = 1, \dots, k$

Esempio:

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

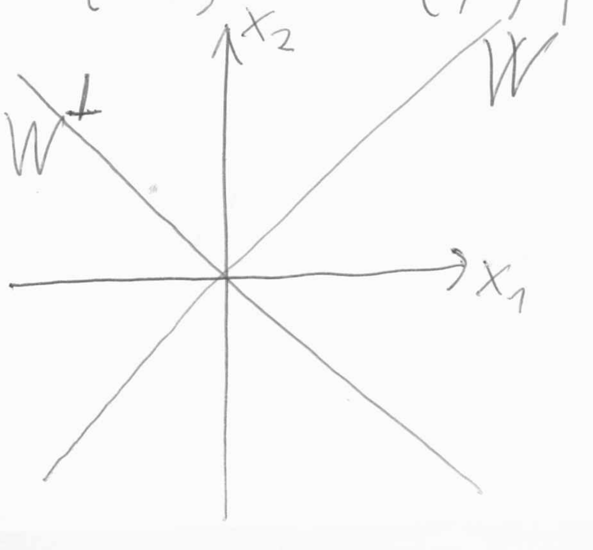
$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_2 + y_1 x_2$ $\qquad W = \{\underbrace{(x_1, x_2)}_{\in \mathbb{R}^2} \mid x_2 - x_1 = 0$

$W^\perp = \left\{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W\right\}$

Sia $\mathcal{B}_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ cerco $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 0 \Rightarrow y_1 + y_2 = 0$

$\Downarrow$

$y_2 = -y_1$



Prodotto scalare:

$$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Prodotto scalare <u>standard</u> su $\mathbb{R}^2$

È forma bilineare, simmetrica, definita positiva.

Dimostro che è definito positivo

$$F((v,v)) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\text{è il quadrato della norma del vettore}} > 0 \quad \forall v \neq 0$$

Ritorno al generale:

$W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V (~~DIMOSTRARE PER ESERCIZIO~~)

DIMOSTRAZIONE:

Fissata $\mathcal{B}_W = \{w_1, \dots, w_k\}$, $W^\perp = \{v \in V \mid F((v,w)) = 0 \ \forall w \in W\}$

Per trovare $W^\perp$ devo cercare $v \in V \mid \begin{cases} F((v, w_1)) = 0 \\ \vdots \\ F((v, w_k)) = 0 \end{cases}$

Data $\mathcal{B}_V = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_{n-k}\}$

$\Downarrow$

$v = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k + b_1 v_1 + \dots + b_{n-k} v_{n-k} \Rightarrow$

④

26/3/'12

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 F((w_1, w_1)) + \dots + b_{n-k} F((v_{n-k}, w_1)) = 0 \\ \vdots \\ a_1 F((w_1, w_k)) + \dots + b_{n-k} F((v_{n-k}, w_k)) = 0 \end{cases}$$

Allora $W^\perp$ è lo spazio delle soluzioni di un sistema lin. omogeneo di k equazioni in n incognite

$\Downarrow$

è un sottospazio vettoriale di V