24/10/2011

PROP. Sia "e" un'operazione elementare riga qualunque e $A \in M_{K\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow e(A) = e(I) \cdot A$ (far vedere $\forall$ operazione elementare)

Ciò è vero anche per r operazioni elementari su A;

PROP. date le operazioni elementari $e_1, e_2, \dots, e_r$

$$\Rightarrow e_r(e_{r-1}(e_{r-2}(\dots(e_2(e_1(A)\dots) = e_r(e_{r-1}(e_{r-2}(\dots(e_1(I_K)\dots)\cdot A$$

DIMOSTRAZIONE:

$$e_r(e_{r-1}\cdots(e_2(e_1(A))\dots) = e_r(e_{r-1}\cdots(e_2(e_1(I)\cdot A))\dots) =$$

$$= e_r(e_{r-1}(\dots(e_3(e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A)\dots) = e_r(I)\cdot e_{r-1}(I)\cdot\dots\cdot e_2(I)\cdot e_1(I)\cdot A =$$

$$= e_r(I)\cdot\dots\cdot e_2(e_1(I))\cdot A = e_r(e_{r-1}\cdots e_2(e_1(I))\dots)\cdot A$$

Procedendo a ritroso abbiamo dimostrato la proposizione

c.v.d.

Sia ora $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertibile. Sappiamo quindi che $rg\,A$ è massimo.

$\Rightarrow$ $rg\,A = n \Rightarrow$ la matrice A ridotta in forma canonica è I_n

$\Rightarrow \exists$ r operazioni elementari $e_1, \dots, e_r \mid e_r(e_{r-1}(\dots(e_1(A)\dots) = I$

$$\parallel$$

$$e_r(e_{r-1}\cdots(e_2(e_1(I)\dots)\cdot A$$

$$\Rightarrow (e_r(e_{r-1}(\dots(e_1(I))\dots))\cdot A = I \Rightarrow e_r(e_{r-1}(\dots(e_1(I)\dots) = A^{-1}$$

In pratica formiamo la matrice $(A \vdots I) \in \mathcal{M}_{n \times 2n}$ e cerchiamo la matrice equivalente $e_r(e_{r-1} \cdots e_2(e_1(A \vdots I) \cdots) = (I \vdots A^{-1})$

Esempio:

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ è invertibile perchè $|A| \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = ?$

$$(A \vdots I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{}{\overset{R_3 = R_1 - R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{R_3 = 2R_2 - R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2 = 3R_2 - 2R_3}{\overset{R_1 = 3R_1 - R_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_2 = \frac{R_2}{3},\ R_3 = \frac{R_3}{(-3)}}{\overset{R_1 = \frac{R_1 - 2R_2}{3}}{\sim}} \Bigg(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{= I} \ \vdots \ \underbrace{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}}_{= A^{-1}} \Bigg)$$

Abbiamo trovato l'identità NELLA MATRICE A SINISTRA E QUINDI A^{-1} NELLA MATRICE A DESTRA.

Esiste un altro metodo per calcolare l'inversa di una matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

Sappiamo che: $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot |\hat{A}_{ij}|$ (sviluppato secondo la i-esima riga)

DEFINIZIONE:

$(-1)^{i+j} |\hat{A}_{ij}|$ è il COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} nella matrice A.

DEFINIZIONE:

La matrice costituita dai complementi algebrici degli elementi di A è una matrice $n \times n$, detta AGGIUNTA di A e indicata con A^*.

ES.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

PROPOSIZIONE:

Data la matrice A invertibile $\Rightarrow A^{-1} = \dfrac{(A^*)^T}{|A|}$

ES.) $|A| = -3$

Calcoliamo ora $(A^*)^T$, ovvero la trasposta di A^*:

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE:

dimostro che $\underset{(p_{ij})}{P} = A \cdot (A^*)^T = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = |A| \cdot I$

$$\Rightarrow p_{11} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \left| \hat{A}_{1j} \right| = \underline{|A|}$$

Stessa cosa per ogni $p_{ii} = |A|$

$\boxed{\text{Dimostrare che ogni } p_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j}$: ESERCIZIO PER CASA

cvd

Torniamo ora ai sistemi lineari per studiarne lo spazio delle soluzioni.

Consideriamo i sistemi lineari omogenei di K equazioni in n incognite.

$\Rightarrow \exists$ sempre almeno una soluzione : quella nulla.

Se $\exists$ "solo" quella nulla $\Rightarrow$ se voglio rappresentare geometricamente le soluzioni del sistema, sol Σ_0, otterrò nello spazio ambiente $\mathbb{R}^n$ un unico punto che sarà l'origine di un sistema di riferimento introdotto in $\mathbb{R}^n$

Supponiamo che $\exists$ una soluzione $v = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \neq (0, \dots, 0) \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ ho un'infinità di soluzioni poiché ogni multiplo di v è soluzione di Σ_0

$$\Rightarrow \Sigma_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{K1}x_1 + a_{K2}x_2 + \dots + a_{Kn}x_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n \equiv 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{K1}\tilde{x}_1 + a_{K2}\tilde{x}_2 + \dots + a_{Kn}\tilde{x}_n \equiv 0 \end{cases}$$

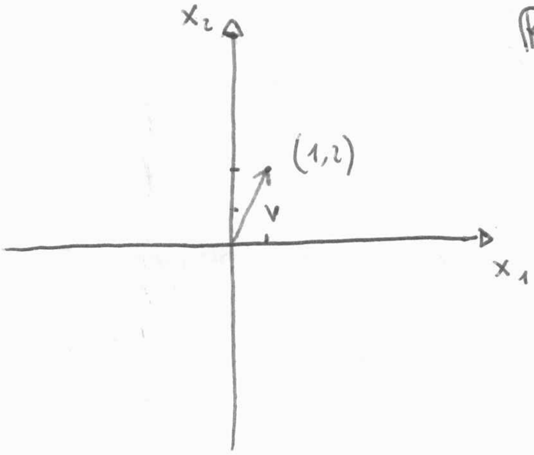
In un sistema di riferimento il miglior modo per rappresentare le soluzioni di un sistema consiste nell'utilizzare dei vettori.

VETTORE DA "VEHO" = trasportare

VEDIAMO IN PRIMO LUOGO IL VETTORE IN $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ES.) Sia $v = (1, 2)$

Definisco un sistema di riferimento di assi cartesiani nel piano:



$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

Il vettore v ha origine in $(0;0)$ e secondo estremo in $(1,2)$. Il verso cui è orientato È DATO DALLA FRECCIA

Ho una corrispondenza biunivoca nel piano TRA I PUNTI DEL PIANO E I VETTORI GEOMETRICI.

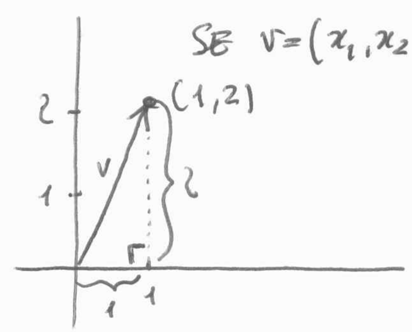
LA LUNGHEZZA DEL $\underbrace{\text{SEGMENTO}}$ CHE RAPPRESENTA v SI DICE MODULO DI v

Quanto vale il modulo di v?

Si utilizza il teorema di Pitagora:

SE $v = (1,2)$

$|v| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



SE $v = (x_1, x_2) \Rightarrow |v| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

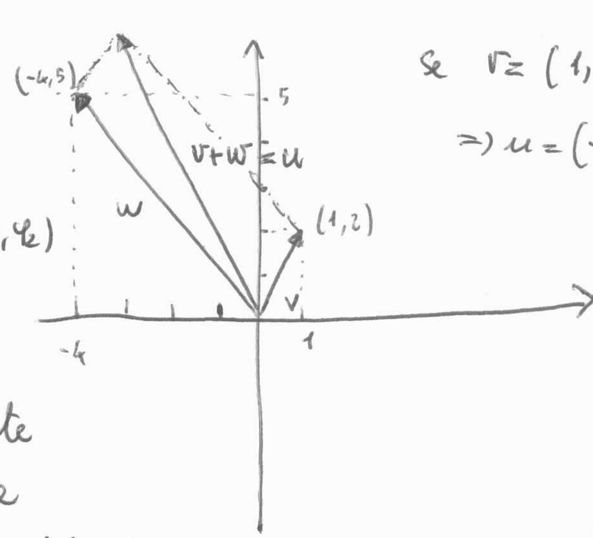
Somma di vettori

$v + w = u$

Si utilizza la regola del parallelogramma: SE $v = (x_1, x_2)$, $w = (y_1, y_2)$

$\Rightarrow u = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$

Inoltre, date le coordinate dei vettori addendi, si ~~può calcolare~~ possono calcolare le coordinate del vettore somma, sommando le rispettive coordinate dei vettori addendi



Se $v = (1,2)$, $w = (-4,5)$

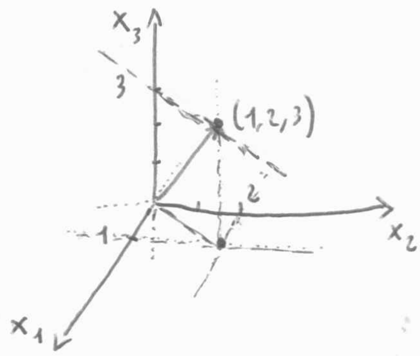
$\Rightarrow u = (-3, 7)$

Moltiplicando un vettore per uno scalare il suo modulo ~~raddoppia~~. VIENE MOLTIPLICATO PER LO SCALARE STESSO

OGNI COORDINATA E' MOLTIPLICATA PER LO SCALARE

Tutto ciò vale anche in $\mathbb{R}^3$ (dove i vettori hanno 3 coordinate)

ES: $v(1,2,3)$



Come in $\mathbb{R}^2$, un vettore si individua conducendo le parallele e trovando i punti d'intersezione in modo opportuno.

$|v| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

POSSIAMO SOMMARE DUE VETTORI IN $\mathbb{R}^3$ COME DETTO PRIMA E MOLTIPLICARE UN VETTORE PER UNO SCALARE

FARE ESEMPI IN $\mathbb{R}^3$.