23/11/11

PROPOSIZIONE:

Il rango riga ($= \dim R(A)$) di una matrice $A \in M_{p \times n}$ coincide con il suo rango colonna ($= \dim C(A)$).

DIMOSTRAZIONE:

Sia B la matrice a gradini canonica di $A \Rightarrow$ posto rg colonne di $A = r \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccccccc} e_1 & & & & e_2 & & & & & & e_r & & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 & * & & * \\ \vdots & & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & * & & * \\ & & & & & & & & 0 & \cdots & 0 & * & & * \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & & & 1 & * & \cdots & * \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)_{p \times n} \end{array}$$

$\leftarrow$ r-ESIMA RIGA

$\Rightarrow$ Nella matrice B ci sono r righe non nulle (= quelle dei pivot)

$\Rightarrow R(B) = \langle\langle R_1, \dots, R_r \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ dimostriamo che $R_1, \dots, R_r$ sono linearmente indipendenti:

cioè $a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_r R_r = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$

$$\Rightarrow a_1 (1 * \cdots * \underset{\substack{\text{1ª coordinata} \\ \text{della colonna} \\ e_2}}{0} * \cdots * \underset{\substack{\text{1ª coord.} \\ \text{della colonna} \\ e_r}}{0} * \cdots) + a_2 (0 \cdots 0 \underset{\substack{\text{2ª coordinata} \\ \text{della colonna} \\ e_2}}{1} * \cdots * \underset{\substack{\text{2ª coord} \\ \text{della colonna} \\ e_3}}{0} * \cdots * \underset{\substack{\text{2ª coordin.} \\ \text{della colonna} \\ e_r}}{0} * \cdots *) + \dots$$

$$+ a_r (0 \dots 0 \underset{\substack{\text{i-esima coord} \\ \text{della colonna} \\ e_r}}{1} * \cdots *) = (0, \dots, 0)$$

$$(a_1 * \cdots * 0 * \dots * 0 * \dots) + (0 \dots 0 a_2 * \dots * 0 * \dots * 0 * \dots *) + \dots +$$
$$+ (0 \dots 0 a_r * \dots *) = (0, \dots, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 * \cdots * a_2 * \dots * a_3 * \dots * a_r * \cdots *) = (0, \dots, 0)$$

$\Rightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1 \dots r \Rightarrow \dim R(B) = r$ ma poiché $R(A) \equiv R(B) \Rightarrow \dim R(A) = r$

PROPOSIZIONE: da dimostrare per esercizio

la forma a gradini canonica di una matrice è UNICA.

DIMOSTRAZIONE: (DA FARE PER ESERCIZIO)

(Supponiamo che esistano due matrici diverse B e C entrambe forme a gradini canoniche della stessa matrice $A \Rightarrow A \sim B$ e $A \sim C$ $\Rightarrow B \sim C \Rightarrow$ HANNO LE STESSE COLONNE CANONICHE $\Rightarrow$ DIMOSTRIAMO CHE HANNO LE STESSE RIGHE CONSIDERANDO CHE $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C)$ E QUINDI ...)

Siano dati K vettori di uno spazio n-dimensionale $V_1, \dots, V_K$ e vogliamo valutare quanti e quali vettori sono l. indipendenti, supposto di trovarne r lin. indip. con $r < n$ $\Rightarrow$ vogliamo completare l'insieme di tali vettori l. indip. aggiungendone altri fino a ottenere una base di $\mathbb{R}^n$.

METODO PRATICO PER OTTENERLI:

formiamo una matrice $A \in M_{m \times (K+N)}$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_K & e_1 & e_2 & e_m \\ | & | & & | & | & | & | \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg} A = m$$

PERCHÈ CI SONO IN A n VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI: QUELLI CANONICI

$\Rightarrow$ riduco A alla forma a gradini canonica B

$$\text{con } B = \begin{pmatrix} e_1 & & & e_2 & & & e_3 & & e_m & * \dots & * \\ 1 & * & \dots * & 0 & * & \dots * & 0 & \dots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 & & \\ 0 & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & & 1 & * \dots & * \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le colonne di A nelle stessa posizione occupata dai vettori canonici di B sono l. indipendenti e quindi formano una base di $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO

siano $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$, completare a una base di R^3

lin indip.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\2&4&0&1&0\\3&6&0&0&1\end{pmatrix} \underset{R_3 = R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 = R_2 - 2R_1}{\sim}} \begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&-3&0&1\end{pmatrix} \underset{R_3 = 2R_3 - 3R_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\0&0&-2&1&0\\0&0&0&-3&2\end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{R_2 = 3R_2 - R_3}{\sim} \begin{pmatrix}1&2&1&0&0\\0&0&-6&0&2\\0&0&0&-3&2\end{pmatrix} \overset{R_1 = 6R_1 + R_2}{\sim} \begin{pmatrix}6&12&0&0&2\\0&0&-6&0&2\\0&0&0&-3&2\end{pmatrix} \underset{\substack{R_2/-6\\R_3/-3}}{\overset{R_1/6}{\sim}}$$

lin indip

$$\sim \begin{pmatrix}1&2&0&0&1/3\\0&0&1&0&-1/3\\0&0&0&1&-2/3\end{pmatrix} \Rightarrow$$

il secondo è multiplo del primo

NELLA MATRICE INIZIALE LA PRIMA, LA TERZA E LA QUARTA COLONNA SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, MENTRE LA SECONDA È DOPPIA DELLA PRIMA E LA QUINTA COLONNA C_5 è
$C_5 = \frac{1}{3} C_1 - \frac{1}{3} C_3 - \frac{2}{3} C_4$

$$\Rightarrow B_{R^3} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

SOTTOSPAZI VETTORIALI

Siano dati 2 sottospazi U e W di uno spazio vettoriale V

$U < V$ e $W < V$; costruisco a livello insiemistico ("è sottospazio")

$U \cap W$ e $U \cup W$ $\longrightarrow$ Tali sottoinsiemi sono sottospazi di V?

per $U \cap W$ ① preso $0 \in V \Rightarrow 0 \in U \cap W$? vero perché 0 sta in U e in W.

② dati $v_1, v_2 \in U \cap W \Rightarrow v_1 + v_2 \in U \cap W$? vero perché $v_1 + v_2 \in U$, e $v_1 + v_2 \in W \Longrightarrow$ quindi $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

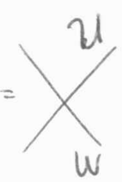
③ dati $v \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v \in U \cap W$? vero perché $\lambda v \in U$ e $\lambda v \in W \Rightarrow$ quindi $\lambda v \in U \cap W$.

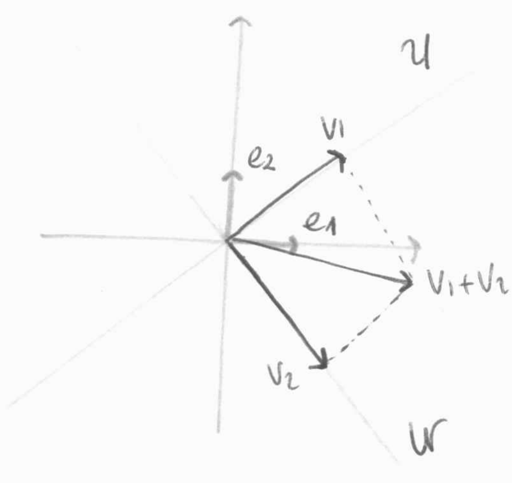
per $U \cup W$

$U \cup W$ in generale NON è un sottospazio.

- controesempio

$V = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow U \cup W =$ 



$\Rightarrow$ consideriamo il più piccolo sottospazio di V che contiene $U \cup W$: Esso si indica con $U + W$ ed è così definito

$U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ e } w \in W \}$: DIMOSTRARE PER ESERCIZIO CHE È UN SOTTOSPAZIO

$U + W = \mathbb{R}^2$

DEF! Se $U \cap W = \{0\}$ => la loro somma è SOMMA DIRETTA
e si indica con $U \oplus W$.

NEL CONTROESEMPIO $U \oplus W = \mathbb{R}^2$

TEOREMA DI GRASSMANN

Dati U e W | $U \leq V$ e $W \leq V$ con V spazio vettoriale
n-dimensionale => $\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$

(nell'esempio: $\dim U = 1$, $\dim W = 1$, $\dim(U+W) = 2$)
DI PRIMA