Lezione di Geometria del 21-11-2011

Esercizio

Data matrice $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$

$\mathcal{R}(A)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $\dim \mathcal{R}(A) = rg(A)$

Se $A \sim A'$ con $A' \in \mathcal{M}_{p\times n}$

$\mathcal{R}(A')$ e un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ con dim $\mathcal{R}(A') = \dim \mathcal{R}(A) = r$
$= rg\, A = rg(A')$

Come sono messi $\mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{R}(A')$?

$\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(A')$ perché?

Dimostrazione:

Quando due insiemi coincidono? Quando hanno gli stessi elementi

$$\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(A') \begin{cases} \mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A') \\ \mathcal{R}(A') \subseteq \mathcal{R}(A) \end{cases}$$

vettori riga

$\mathcal{R}(A') \subseteq \mathcal{R}(A)$: perché?

$\mathcal{R}(A')$ è generato da $R_1(A'), R_2(A') \dots, R_p(A')$

Quindi, se un vettore $v \in \mathcal{R}(A')$, allora $v = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j R_j(A')$

E come si ottengono i vettori riga di A' a partire dai vettori riga di A?

Ogni vettore riga di A' è una combinazione lineare delle righe di A.

Tornando al vettore di prima.

$$v = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j R_j(A') = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{k,j} R_k^{(j)}(A) \right)$$

è una combin. lineare delle righe di A

$\mathcal{R}(A) \subseteq \mathcal{R}(A')$

Stessa dimostrazione per $\mathcal{R}(A') \subseteq \mathcal{R}(A)$ poichè, per tornare da A' ad A bisogna usare operazioni elementari riga. CHE SONO LE INVERSE DI QUELLE USATE PER PASSARE DA A AD A'.

Quindi $\underline{\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(A')}$ CVD

Invece, qual'è il rapporto fra $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{C}(A')$?

Sono entrambi sottospazi di $\mathbb{R}^p$, con stessa dimensione uguale al $rg(A) = rg(A') = r$

Sono diversi. Controesempio 1):

$A \in \mathcal{M}_{2\times2}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}(A) = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle\rangle$: NO

A non adatta perchè di rango massimo: $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A') = \mathbb{R}^2$

<u>Controesempio</u> #2):

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}(A) = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle\rangle \rightarrow$ è un piano, sono linearmente indipen.

Considero $A' \sim A$ ottenuta con scambio di riga

$A' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\mathcal{C}(A') = \langle\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle\rangle$

Devo dimostrare che i generatori di $\mathcal{C}(A)$ non possono generare $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 = 1 \\ 5\alpha_1 + 6\alpha_2 = 5 \end{cases} \rightarrow \text{esiste una soluzione?}$$

ANALIZZIAMO I TRE VETTORI DATI:

$$\det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{array} \right) = 14 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot (-2) = -12 \neq 0$$

$\Rightarrow$ I 3 VETTORI COLONNA SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

quindi $\mathcal{C}(A') \neq \mathcal{C}(A)$ CVD

Altre proprietà: - se delle colonne sono linearmente indip. in A LE COLONNE CHE OCCUPANO LE STESSE POSIZIONI in A', allora lo sono
(Le colonne linearmente dipendenti di A si ottengono da quelle lin. indip. ~~di~~ tramite COMBINAZIONE LINEARE ~~operazioni~~ $\Rightarrow$ pure le colonne linearmente dipendenti di A' si ottengono con COMBINAZIONE LINEARE ~~operazioni~~ delle colonne linear. indip. di A': Lo Dimostraremo in 4

Osservazione:
Dato un sistema lineare non omogeneo $\Sigma: AX = B$
dove $A \in \mathcal{M}_{p \times n}$, $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}$, $B \in \mathcal{M}_{p \times 1}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots p \\ j=1\dots n}}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

~~P.~~ È possibile scrivere il sistema Σ $AX=B$ ~~come~~ mediante i vettori colonna di A nel seguente modo:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

Allora una soluzione di Σ è una ennupla di scalari che, DATA COME COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE DEI vettori colonna di A, mi danno B

Proposizione

Date le matrici $A, A' \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, con $A \sim A'$, allora:

1) se il j-esimo vettore colonna di A' è combinazione lineare dei restanti vettori colonna ~~[illegible]~~ con coefficienti $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$ $\Rightarrow$ il vettore colonna j-esimo di A ~~che sarà~~ $C_j(A)$, sarà una combinazione lineare dei restanti vettori colonna, con coefficienti $\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}$.

~~Dimostrazione:~~

2) se $C_i(A')$ e $C_j(A')$ sono linearmente indipendenti, allora $C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono pure linearmente indipendenti (ANCHE CON $A'=B$ forma canonica a gradini di A)

Dimostrazione di 1):

$$C_j(A') = \alpha_1 C_1(A') + \quad + \alpha_{j-1} C_{j-1}(A') + \alpha_{j+1} C_{j+1}(A') + + \alpha_{n-1} C_n(A')$$

$$C_j(A') - \alpha_1 C_1(A') \ldots - \alpha_{n-1} C_n(A') = 0$$

QUESTA COMBINAZIONE SI PUO' RISCRIVERE COME IL PRODOTTO DELLA MATRICE

come sopra ma coi meno

$$\begin{pmatrix} C_j & C_1 & C_2 & \cdots & C_{j-1} & C_{j+1} & \cdots & C_n \\ | & | & | & & | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \\ -\alpha_2 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema Σ_0 che ha come matrice dei coeff. $\begin{pmatrix} C_j & C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & | & & | \end{pmatrix}$

LA MATRICE COSTITUITA DALLE COLONNE DI A' $\Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in sol\,\Sigma_0$, tenendo conto che $sol\,\Sigma_0$ non cambia se sostituisco la matrice A' con una equivalente, ad esempio quella FORMATA DALLE COLONNE DI A.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_j(A) & C(A) & \cdots & C_n(A) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_1 \\ \vdots \\ -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_j(A) - \alpha_1 C_1(A) - - \alpha_{n-1} C_n(A) = 0$$

$$C_j(A) = \alpha_1 C_1(A) + \cdots + \alpha_{n-1} C_n(A)$$

Dimostrazione di 2):

$\alpha_i C_i(A') + \alpha_j C_j(A') = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j = 0$

$\alpha_i C_i(A') + \alpha_j C_j(A') + 0 \cdot C_{i+1}(A') \dots$

$\alpha_i C_i(A') + \alpha_j C_j(A') = 0 \cdot C_1(A') + \dots + \alpha_i C_i(A') + 0 \cdot C_{j+1}(A') + \dots + 0 \cdot C_n(A')$

$\dots + \alpha_j C_j(A') + 0 \cdot$

$$\Downarrow \quad = 0$$

$$\begin{pmatrix} C_1(A') & \dots & C_n(A') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \\ \alpha_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \\ \alpha_j \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol \Sigma_0$$

$\Rightarrow$ POICHÉ LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI NON CAMBIA

$$\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_i \\ 0 \\ \alpha_j \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$0 C_1(A) + 0 C_2(A) + \dots + \alpha_i C_i(A) + \dots + \alpha_j C_j(A) = 0$

$\alpha_i C_i(A) + \alpha_j C_j(A) = 0$ ma $\alpha_i = \alpha_j = 0$

$$\Downarrow$$

$C_i(A)$ e $C_j(A)$ sono linearmente indipendenti CVD

Quindi... a cosa serve sapere 1) e 2)?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

uno il triplo

uno il triplo

LA SECONDA COLONNA DI A' È TRIPLA DELLA PRIMA

$\Rightarrow$ LA SECONDA COLONNA DI A È TRE VOLTE LA PRIMA

COSÌ COLONNE DI A SONO linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ SONO linearmente indipendenti LE COLONNE DI A' CHE OCCUPANO LA STESSA POSIZIONE.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{pmatrix}$$

POICHÉ

$$e_5 = e_1 + e_2 + 3e_4 \Rightarrow C_1 + C_2 + 3C_4 = C_5$$

vettori colonna di A