27/03/2022 (1)

$F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare su uno spazio vettoriale V di dimensione n

Com'è associata la matrice ad F?

Fissiamo una base $\mathcal{B}_V$ su V $\quad \mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$\Rightarrow$ Dati due vettori $v, w \in V$ cerchiamo $F((v,w)) = F((a_1v_1 + \dots + a_nv_n, b_1v_1 + \dots + b_nv_n)) = F((a_1v_1, w)) + F((a_2v_2, w)) + \dots + F((a_nv_n, w)) =$
$= a_1F((v_1,w)) + \dots + a_nF((v_n,w))$. (Questo per la LINEARITÀ di F sulla sua prima componente) $= a_1F((v_1, b_1v_1 + \dots + b_nv_n)) \dots + a_nF((v_n, b_1v_1 + \dots + b_nv_n)) = a_1(F((v_1, b_1v_1)) + F(v_1, b_2v_2)) + \dots + F((v_1, b_nv_n)))$
$+ \dots + a_n(F((v_n, b_1v_1)) + F((v_n, b_2v_2)) + \dots + F((v_n, b_nv_n))) =$
$a_1b_1F((v_1,v_1)) + a_1b_2F((v_1,v_2)) + \dots + a_nb_1F((v_n,v_1)) + \dots + a_nb_nF((v_n, v_n))$

Mi basta conoscere l'immagine dei vettori di base per conoscere le immagini di tutti i vettori.

- Da ciò consegue che la matrice associata ha come entrate le IMMAGINI DELLE coppie dei vettori di base:

- Pongo $[F]_{\mathcal{B}_V}$

$$\begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ F(v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & \dots & F((v_2,v_n)) \\ \vdots & & & \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}_{n \times n}$$

questa matrice dipende dalla base *

$\Downarrow$

ponendo $[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ e $[w]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Rightarrow F((v,w)) = \underset{1\times n}{[v]^T_{\mathcal{B}_V}} \cdot \underset{n\times n}{[F]_{\mathcal{B}_V}} \cdot \underset{n\times 1}{[w]_{\mathcal{B}_V}}$ e risulta quindi uno scalare.

- Pertanto in generale:

Posto $x = [v]_{\mathcal{B}_V}$ e $y = [w]_{\mathcal{B}_V} \Longrightarrow \boxed{F((x,y)) = x^T [F]_{\mathcal{B}_V}\, y}$

ESEMPIO:

$$F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2$$

F è bilineare?

Voglio dimostrare che:

$$F((\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)+(\hat{x}_1,\hat{x}_2),(y_1,y_2)) = F((\tilde{x}_1+\hat{x}_1, \tilde{x}_2+\hat{x}_2),(y_1,y_2)) \overset{\text{applichiamo la legge}}{=} (\tilde{x}_1+\hat{x}_1)y_1 +$$

$$(\tilde{x}_2+\hat{x}_2)y_2 - (\tilde{x}_1+\hat{x}_1)y_2 = \tilde{x}_1 y_1 + \hat{x}_1 y_1 + \tilde{x}_2 y_2 + \hat{x}_2 y_2 - \tilde{x}_1 y_2 - \hat{x}_1 y_2$$

se faccio, ottengo la stessa cosa:

$$F((\tilde{x}_1,\tilde{x}_2),(y_1,y_2)) + F((\hat{x}_1,\hat{x}_2),(y_1,y_2)) = \tilde{x}_1 y_1 + \tilde{x}_2 y_2 - \tilde{x}_1 y_2 + \hat{x}_1 y_1 + \hat{x}_2 y_2 - \hat{x}_1 y_2$$

Andando avanti nella dimostrazione DELLA BILINEARITÀ risulta che la forma data è bilineare. (Continuare per esercizio)

- Nell'espressione analitica:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_2$$

$1 = F((v_1,v_1))$ $\quad 1 = F((v_2,v_2))$ $\quad -1 = F((v_1,v_2))$ e $0 = F((v_2,v_1))$

Fissiamo la base canonica in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow [F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} F((e_1, e_1)) & F((e_1, e_2)) \\ F((e_2, e_1)) & F((e_2, e_2)) \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice associata a forma bilineare nella base canonica

- Prendo $(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1, -x_1 + x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 - x_1 y_2 + x_2 y_2$

Che legame c'è tra matrice * e base?
Come lo posso capire? Cambiando le coordinate.
Sia $\mathcal{B}'_V$ un'altra base di V: in che modo cambiano le coordinate dei vettori?
Nella base $\mathcal{B}_V$ le coordinate erano $x_1 \dots x_n$ cioè $[v]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'_V} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ CONSIDERO LA MAPPA IDENTITÀ ASSOCIATA AL CAMBIO DI COORDINATE:

$(V, \mathcal{B}_V) \xrightarrow{id} (V, \mathcal{B}'_V)$

$(x_1, x_n) \longmapsto (x'_1, \dots, x'_n)$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = [id]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}'_V} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = [id]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

analogamente:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = [id]_{\mathcal{B}'_V}^{\mathcal{B}_V} \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_m \end{pmatrix}$

$\boxed{F((v, w)) = [v]^T_{\mathcal{B}_V} [F]_{\mathcal{B}_V} [w]_{\mathcal{B}_V} =}$

$\Downarrow$ cambiando base

$= [v]^T_{\mathcal{B}'_V} [F]_{\mathcal{B}'_V} [w]_{\mathcal{B}'_V}$

$$[v]^T_{\mathcal{B}} \cdot [F]_{\mathcal{B}} \cdot [w]_{\mathcal{B}} = \left([id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot [v]_{\mathcal{B}'}\right)^T \cdot [F]_{\mathcal{B}} \left([id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot [w]_{\mathcal{B}'}\right) =$$

$$= [v]^T_{\mathcal{B}'} \cdot \boxed{\left([id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^T \cdot [F]_{\mathcal{B}} [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}} \leftarrow S \quad [w]_{\mathcal{B}'} = [v]^T_{\mathcal{B}'} [F]_{\mathcal{B}'} [w]_{\mathcal{B}'}$$

di questo è dato dal prodotto questo

Queste uguaglianze sono date indipendentemente dai vettori, ovvero sono vere $\forall\, v, w \in V$

Cioè posto $S = [id]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \Longrightarrow \boxed{[F]_{\mathcal{B}'} = S^T [F]_{\mathcal{B}} S}$

DEFINIZIONE

Due matrici quadrate A, B si dicono congruenti (CONGRUENTI) se esiste una matrice $S \in M_{n \times n}$ invertibile / $B = S^T A S$

(ESERCIZIO: Dimostrare che la relazione di congruenza tra matrici di ordine n è di equivalenza; scriveremo $A \sim_c B$)

Una classe di equivalenza della relazione di equivalenza tra matrici, individua una forma bilineare.

- Siano $A \sim_c B \Rightarrow$ cerchiamo la relazione tra i determinanti di tali matrici

Se $A \sim_c B \Longrightarrow S^T A S \Longrightarrow |B| = |S^T A S| = |S^T|\,|A|\,|S| = |S|\,|A|\,|S| =$
$= |S|^2 |A|$ $\quad |B|$ e $|A|$ differiscono di un numero positivo $\Rightarrow$ hanno lo stesso segno

Proposizione

Due matrici congruenti hanno lo stesso rango

$B = SA$ $\quad S$ invertibile $\Rightarrow$ $rg B = rg A$

Dimostrazione

Da fare considerando tale proposizione come un corollario della proposizione: SE $B = SA$, S invertibile $\Rightarrow rgB = rgA$

DEFINIZIONE: ESSENDO
Il rango invariante per le classi di congruenza $\Rightarrow$
Chiamo rango di
• Una forma bilineare - il rango di una delle matrici ad essa associata in una base qualunque.

Definizione

Una forma bilineare si dice simmetrica se ~~~~ posta $F: V \times V \to \mathbb{R}$,

$$F((v,w)) = F((w,v)) \quad \forall v,w \in V.$$

SE F E' UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA $\Rightarrow$
Data $B = \{v_1 \dots, v_n\}$ base di $V \Rightarrow [F]_B = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & \dots & & \\ F((v_3,v_1)) & \dots & & \\ F((v_n,v_1)) & \dots & & \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [F]_B$ è simmetrica; VALE qualunque sia la base data.

Definizione

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ è detta DEFINITA POSITIVA se $F((v,v)) > 0 \ \forall v \neq 0$

SEMIDEFINITA POSITIVA se $F((v,v)) \geq 0 \ \forall v \in V$

DEFINITA NEGATIVA se $F((v,v)) < 0 \ \forall v \neq 0$

SEMIDEFINITA NEGATIVA se $F((v,v)) \leq 0 \ \forall v \in V$

INDEFINITA altrimenti