19/12/2011 (1)

Fasci di piani in $\mathbb{R}^3$: dati due piani in $\mathbb{R}^3$: $\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ e $\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ => il fascio di piani è dato dall'insieme dei piani che si ottengono come combinazione lineare dei piani dati:

$$\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

Studiamo il sistema $\Sigma: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$ dobbiamo studiare le matrici associate (rango)

$\Rightarrow rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $\Rightarrow rg\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right) = 2 \Rightarrow$ non può aumentare perché non aumentano le righe e non può diminuire perché è sempre presente la sottomatrice con rango 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Per Rouché-Capelli il sistema ha soluzione => Sol Σ è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ di dimensione $3-2=1$. I due piani si intersecano in una retta.

Il fascio è detto <u>PROPRIO</u> e la retta determinata come Sol Σ è detta <u>ASSE DEL FASCIO</u>: tutti i piani del fascio passano per questa retta.

Supponiamo ora che $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow rg\left(\begin{array}{ccc|c} & & & d_1 \\ & & & d_2 \end{array}\right) = $ 1 => $\dim Sol\,\Sigma = 3-1=2$

=> i due piani coincidono e il fascio si riduce a quell'unico piano.

Se invece $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=1$ e $rg\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right)=2$ $\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione, ma i piani sono paralleli perché hanno la stessa giacitura: $a_1x+b_1y+c_1z=0$.

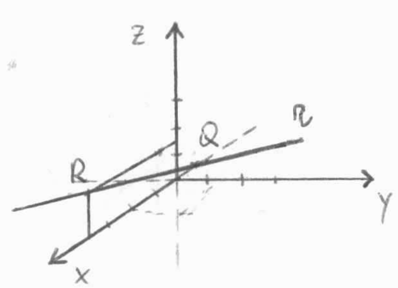
Il fascio è detto <u>IMPROPRIO</u> ed è formato da piani paralleli.

<u>ESERCIZIO</u>

Dati $P=(1;1;1)$ $Q=(2;1;2)$ $R=(3;-1;1)$. Determinare 1) l'equazione di π, piano per P, Q, R; 2) l'equazione della retta r per Q e R; 3) il fascio di piani per P e paralleli alla retta r.

1) Preso $X=(x,y,z)$ => $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ← equazione del piano. <u>OPPURE</u> CONSIDERO L'EQUAZIONE $ax+by+cz+d=0$: I SUOI coefficienti sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, per cui ne DOVRÒ TROVARE tre in funzione del quarto: SOSTITUISCO LE COORDINATE DEI TRE PUNTI DATI NELLA EQUAZIONE $ax+by+cz+d=0$ => $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 2a+b+2c+d=0 \\ 3a-b+c+d=0 \end{cases}$: RISOLVENDOLO TROVO 3 COEFFICIENTI IN FUNZIONE DEL QUARTO E QUINDI TROVO L'EQUAZIONE CERCATA.

2)



$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-1}{-1-1} = \frac{z-2}{1-2}$$

$\begin{cases} x-2 = -\frac{y+1}{2} \\ -\frac{y+1}{2} = -\frac{z+2}{1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=-y+1 \\ -y+1=-2z+4 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x=-y+5 \\ 2z=y+3 \end{cases}$ Equazione cartesiana di r

OPPURE DETERMINIAMO LA SUA DIREZIONE : $r_0 = \langle\langle (R-Q) \rangle\rangle$ =>

$$B_{r_0} = \left\{ \overset{r_0}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\} \Rightarrow r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t+1 \\ z = -t+2 \end{cases}$$

EQUAZIONE VETTORIALE

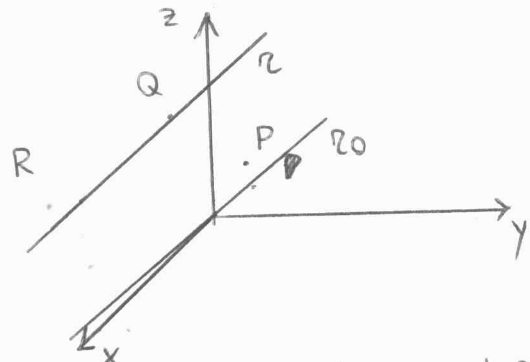
← EQUAZIONE PARAMETRICA DI r

②

eq. r CARTESIANA $\begin{cases} x = -y/2 + 5/2 \\ z = y/2 + 3/2 \end{cases} \Rightarrow$ PONENDO $y = t \Rightarrow \begin{cases} x = -t/2 + 5/2 \\ y = t \\ z = t/2 + 3/2 \end{cases}$ RITROVIAMO L'EQUAZIONE PARAMETRICA

il vettore $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ deve essere multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e infatti è vero: POSSIAMO ANCHE DARE $r_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) Il fascio di piani per P e paralleli alla retta r



perché siano paralleli occorre che la direzione di r, cioè r_0, sia contenuta nella direzione dei piani del fascio ⇒ il fascio ha come asse una retta // a r_0 passante per P

$$S \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+1 \\ z = -t+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x+3 \\ z = -x+2 \end{cases}$$ ← ASSE S DEL FASCIO CERCATO ⇒

$\Rightarrow \lambda(2x+y-3) + \mu(-x-z+2) = 0$: EQUAZIONE DEL FASCIO

Applicazioni tra spazi vettoriali:

Vogliamo trattare di applicazioni che conservano le operazioni definite negli insiemi. Vogliamo trattare di applicazioni che conservano le operazioni definite negli insiemi: chiamiamo MORFISMO tra tali strutture

Sia $(A, *)$ e $(B, \square)$ due strutture algebriche : chiamiamo MORFISMO tra tali strutture un'applicazione $f: A \to B$ tale che $f(a_1 * a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$ (o omomorfismo)

Esempio $(\mathbb{R}, +)$; $(\mathbb{R}, \cdot) \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un morfismo se $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot) \Rightarrow f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un morfismo di campi se $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

Morfismo biettivo → isomorfismo
suriettivo → epimorfismo

Quando riusciamo a creare un isomorfismo, le due strutture ⇒ ESSE SONO equivalenti.

Le applicazioni tra spazi vettoriali si dicono applicazioni lineari.