19/10/11

ESERCIZIO:

CALCOLO DEL DETERMINANTE MEDIANTE LE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{matrix}R_2=R_2-4R_1\\ \sim\\ R_3=R_3-7R_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}(*)\longrightarrow$$

SE DIVIDO LA SECONDA RIGA PER −3 E LA TERZA RIGA PER −6 IL DETERMINANTE CAMBIA E PER RIOTTENERE IL DETERMINANTE DI PARTENZA BISOGNERÀ POI RIMOLTIPLICARE PER −3 E PER −6 IL DETERMINANTE OTTENUTO.

LASCIO INVARIATO R_3 PER NON MODIFICARE IL DETERMINANTE

(*) GIÀ QUESTA MATRICE HA DETERM. NULLO PER LA PROP: QUANDO UNA RIGA (O COLONNA) È MULTIPLO DELL'ALTRA IL DETERMINANTE È 0.

$$R_3=R_3-2R_2 \sim \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow \det A=0$$

- UTILIZZO DEL DETERMINANTE PER CALCOLARE IL RANGO DELLA MATRICE:

• Definizione:

data $A\in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{R})$ SI DEFINISCE SOTTOMATRICE DI A LA MATRICE CHE SI OTTIENE TOGLIENDO RIGHE e/o COLONNE DI A.

Esempio:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{pmatrix}_{3\times4}\xrightarrow{\text{TOLGO LA 2° RIGA}}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\9&10&11&12\end{pmatrix}\Rightarrow \text{È SOTTOMATRICE DI } A$$

SONO SOTTOMATRICI: AD ESEMPIO:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\9&10&11&12\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}3&4\\7&8\\11&12\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}5&6&8\\9&10&12\end{pmatrix}$$

Se scrivo:

$$B=\begin{pmatrix}1&3\\10&8\end{pmatrix}$$

N.B.: B NON È UNA SOTTOMATRICE PERCHÉ NON L'HO OTTENUTA TOGLIENDO RIGHE (O COLONNE) DELLE MATRICE A.

- TOGLIENDO UNA RIGA E DUE COLONNE OTTENGO UNA SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE DUE. ②

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

- Definizione:

SI DICE MINORE DI ORDINE r DI UNA MATRICE A IL DETERMINANTE DI UNA SUA SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE r.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

ALTRA DEFINIZIONE DI RANGO:

SI DIMOSTRA CHE IL RANGO DI UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{k \times m}$ È L'ORDINE MASSIMO DEI MINORI NON NULLI DI A. INFATTI SI HA LA

- Proposizione:

DATA UNA MATRICE $A \in \mathcal{M}_{k\times m}(\mathbb{R})$ ~~[illegible]~~ $\Longrightarrow rg\, A = r \Longleftrightarrow \exists$ UN MINORE DI ORDINE r NON NULLO E OGNI ALTRO MINORE DI ORDINE SUPERIORE È NULLO.

DIMOSTRIAMO CHE LE DEFINIZIONI SONO EQUIVALENTI! PERCHÈ ABBIAMO IL $\Longleftrightarrow$.

- Dimostrazione: SUPPONIAMO INNANZI TUTTO CHE $rg\, A = r$ (CIOÈ DIMOSTRIAMO "$\Longrightarrow$") $\Longrightarrow \exists\ r$ PIVOT DELLA MATRICE $A \Longrightarrow$ SE A' È LA MATRICE RIDOTTA ALLA FORMA CANONICA MEDIANTE IL METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS, AVREMO IN A' r RIGHE CON ELEMENTI NON NULLI E LE RESTANTI $K-r$ NULLE:

→ POSSONO ESSERCI NUMERI

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & * & * & 0 & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & * & \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \end{array}$$

→ CON OPPORTUNI TAGLI OTTENGO LA SOTTOMATRICE $r \times r$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_r$$

MATRICE IDENTITÀ DI ORDINE r

$\Longrightarrow \exists$ UN MINORE NON NULLO, CON $\det \neq 0$ ESSENDO $\det I = 1$

③

COM'È FATTO UN MINORE DI ORDINE SUPERIORE ?

DEVO AGGIUNGERE RIGHE DI A' DI SOLI "0" PER OTTENERE UNA SOTTOMATRICE DI ORDINE SUPERIORE $\Rightarrow$

OGNI SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE MAGGIORE DI r È OTTENUTA AGGIUNGENDO RIGHE NULLE E QUINDI I MINORI SONO NULLI. SE HANNO ORDINE MAGGIORE DI r! $\Rightarrow$ ANCHE A AVRÀ ALLORA NULLI TUTTI I MINORI DI ORDINE $> r$, POICHÉ LE OPERAZIONI RIGA NON MUTANO LA NULLITÀ DEI DETERMINANTI.

$\Leftarrow$ " SUPPONIAMO ORA CHE NELLA MATRICE ESISTE UN MINORE DI ORDINE r NON NULLO IN $A \Rightarrow$ QUESTO MINORE ESISTE ANCHE IN A' ~~...~~ RIDOTTA ALLA FORMA CANONICA CON OPERAZIONI RIGA CHE NON MUTANO LA NULLITÀ DEI DET.

$\Rightarrow$ SE $\exists$ IN A UN MINORE NON NULLO DI ORDINE $r \Rightarrow \exists$ ANCHE IN $A' \Rightarrow$ LE RIGHE DELLA SOTTOMATRICE IN QUESTIONE NON SONO FORMATE DA TUTTI ZERI $\Rightarrow \exists$ ALMENO r PIVOTS DI A. POICHÉ OGNI ALTRO MINORE È NULLO $\Rightarrow$ LE RIMANENTI RIGHE DI A' SONO FORMATE SOLO DA ZERI $\Rightarrow$ I PIVOTS SONO ESATTAMENTE $r \Rightarrow$ IL RANGO DI A È r.

c.v.d.

OSSERVAZIONE

Se $A \neq (0)_{k\times n}$ ALMENO UN'ENTRATA DELLA MATRICE È NON NULLA QUINDI IL RANGO DI $A \in M_{k\times m}$ È SEMPRE ALMENO 1, A MENO CHE $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

SI VEDE FACILMENTE CHE:

$$1 \leq rg\,A \leq \text{MINIMO FRA } \{k, m\}$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 4} \Rightarrow rg \leq 3.$$

- CALCOLIAMO IL RANGO DELLA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 7\cdot(-3) - 8(-6) + 9\cdot(-3) = -21 + 48 - 27 = 0 \Rightarrow$$

IL rg NON È 3, PER VEDERE SE È 2 MI BASTA TROVARE UN MINORE DI UNA SOTTOMATRICE QUADRATA CHE SIA $\neq 0$.

$\rightarrow$ IN UNA MATRICE SE UN SOLO MINORE DI ORDINE r È $\neq 0$ ALLORA LA MATRICE HA RANGO **ALMENO r**, E SI CERCANO MINORI NON NULLI DI ORDINE SUPERIORE. SE INVECE È $= 0$ **OGNI** MINORE DI ORDINE $r \Rightarrow$ IL RANGO È MINORE DI r E SI ANALIZZANO MINORI DI ORDINE INFERIORE!

- Definizione:

Una matrice A quadrata $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ è invertibile se $\exists$ la sua inversa, cioè se $\exists$ una matrice $B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ tale che:

$A \cdot B = B \cdot A = I$ $\Rightarrow$ B si indica con A^{-1}.

Poiché $A \cdot A^{-1} = I$, allora il $\det(A \cdot A^{-1}) = \det I = 1$, ma per il teorema di Binet:

$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det(A^{-1}) = 1$, quindi il $\det(A) \neq 0$! perché sia invertibile!

Quindi:

Una matrice quadrata $A \in M_{m \times n}$ è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ o in altre parole $\Leftrightarrow$ il suo rango è massimo.

Inoltre il $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$ tutto alla -1

- Proprietà matrice inversa:

1) Se esiste è unica ($\exists$ l'inversa di A $\Rightarrow$ è unica); ipotesi, tesi

Per la dimostrazione di 1) adoperiamo la dimostrazione per assurdo:

- Dimostrazione per assurdo:

Ipotesi $\Rightarrow$ Tesi (L'ipotesi dev'essere sempre vera)

Si nega la tesi e si assume come nostra nuova ipotesi, si fanno ragionamenti logico-deduttivi esatti e si arriva a negare l'ipotesi iniziale $\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow$ la tesi iniziale è vera!

Dimostrazione 1ª proprietà 1) per assurdo:

Supponiamo che $\exists$ due inverse, B e C, di A ($B \neq C$) $\Rightarrow B \cdot A = A \cdot B = I$ e $C A = A \cdot C = I$

Ora:

$B \cdot A = I \Rightarrow$ moltiplico entrambi i membri per C sempre a destra $\Rightarrow (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C \Rightarrow B \cdot (AC) = C$ (per l'associatività)

$B \cdot I = C$

$B = C \Rightarrow$ assurdo

$\Rightarrow$ L'inversa è unica!

PROPRIETÀ DELL' INVERSA:

SE A e B SONO MATRICI INVERTIBILI $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ È INVERTIBILE e $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

DIMOSTRAZIONE:

Io so che: PER DEFINIZIONE DI INVERSA:

$$(A \cdot B)(A \cdot B)^{-1} = I$$

$A \cdot B \cdot (A \cdot B)^{-1} = I$ $\longrightarrow$ SO CHE A e B SONO INVERTIBILI $\Longrightarrow \dots$

DA FINIRE PER ESERCIZIO E DIMOSTRARE ANCHE CHE

SE A e $B \in M_{n \times n}$ SONO INVERTIBILI $\Longrightarrow$ $A \cdot B$ È INVERTIBILE

PROPOSIZIONE

SIA $A \in \mathcal{M}_{k \times m}$ ed "e" UN'OPERAZIONE ELEMENTARE RIGA $\Rightarrow$ $e \cdot (A)$ è LA MATRICE EQUIVALENTE ad A OTTENUTA TRAMITE e $\Rightarrow$ PRESO $I \in \mathcal{M}_{k \times k}$ $\Rightarrow$ $I \cdot A = A$.

Si DIMOSTRA CHE:

$e(A) = (e \cdot (I)) \cdot A$ QUESTO è VERO QUALUNQUE SIA L'ORDINE DELLA MATRICE e QUALUNQUE SIA L'OPERAZIONE.

- Esempi numerici di tale asserzione:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \longrightarrow \underset{e \cdot (A) \,=\, \text{SCAMBIO DELLE DUE RIGHE}}{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \Longrightarrow \underset{e(I)}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$