SISTEMI DI CRAMER

Sono sistemi lineari (in generale non omogenei) di n equazioni, n incognite e di rango n.

$\boxed{\text{Esempio}}$

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x-3y=2 \end{cases} \xrightarrow{\text{in forma matriciale}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{\text{ha rango } 2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

~~Nelle~~ • Nelle ipotesi date il sistema è risolubile e poichè $\dim Sol\Sigma = n-n=0$ la soluzione è unica: un punto $P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ dato il sistema: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ si ha: $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori colonna di A secondo i coefficienti $\alpha_1,\dots,\alpha_n$:

$$C_A^1\alpha_1 + \dots + C_A^n\alpha_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Presa: $A=\begin{pmatrix} C_A^1 & C_A^2 & C_A^3 & \cdots & C_A^n \\ | & | & | & & \end{pmatrix}$

sostituisco B a C_A^1 e calcolo il determinante della matrice che ne risulta, cioè:

$$\begin{vmatrix} B & C_A^2 & C_A^3 & \cdots & C_A^n \\ | & | & | & & | \end{vmatrix}$$ e considero il determinante: $$\begin{vmatrix} \underbrace{\alpha_1 C_A^1 + \alpha_2 C_A^2 + \dots + \alpha_n C_A^n}_{B} & C_A^2 & C_A^3 & \cdots & C_A^n \end{vmatrix}$$

$$\left| \alpha_1 C_A^1 + \alpha_2 C_A^2 + \dots + \alpha_n C_A^n \;\; C_A^2 \;\; C_A^3 \cdots C_A^n \right| = \left| \alpha_1 C_A^1 \;\; C_A^2 \cdots C_A^n \right| + \left| \alpha_2 C_A^2 \;\; C_A^2 \cdots C_A^n \right| + \dots + \left| \alpha_n C_A^n \;\; C_A^2 \cdots C_A^n \right| =$$

$$= \alpha_1 \left| C_A^1 \cdots C_A^n \right| + \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{\text{hanno tutte una colonna che è multiplo di un'altra}}$$

$$\Rightarrow \left| B \;\; C_A^2 \cdots C_A^n \right| = \alpha_1 |A| \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\left| B \;\; C_A^2 \cdots C_A^n \right|}{|A|}$$

In generale:

$$\alpha_j = \frac{\left| C_A^1 \cdots C_A^{j-1} \; B \; C_A^{j+1} \cdots C_A^n \right|}{|A|} \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

Si sostituisce cioè B alla colonna C_j per trovare α_j

Tornando all'esempio iniziale:

$|A| = -5$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{7}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}$$

$$Sol\,\Sigma = \left\{ \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right) \right\}$$

Consideriamo uno spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbb{R}$ e l'insieme delle FORME LINEARI su V, cioè applicazioni lineari del tipo:

$\varphi : V \to \mathbb{R}$

Ogni volta che un'applicazione lineare ha per codominio il campo su cui si sta lavorando si parla di FORMA.

L'insieme di tali applicazioni si indica con:

$Hom(V, \mathbb{R})$ oppure $\mathcal{H}om(V, \mathbb{R})$

Su tale insieme definiamo le operazioni di somma fra applicazioni e moltiplicazione per uno scalare.

1) SOMMA

Se $\varphi_1, \varphi_2 : V \to \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2$ è così definita:

$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) \quad \forall v \in V$

2) MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE

$(\alpha \varphi_1)(v) = \alpha(\varphi_1(v)) \quad \forall v \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

~~SOMMA e MOLTIPLI~~

Poichè:

$\varphi_1 + \varphi_2 : V \to \mathbb{R}$ e $\alpha\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$

allora esse sono ancora FORME

DIMOSTRARE CHE SONO LINEARI - PER ESERCIZIO

$\Rightarrow$ Con tali operazioni:

$\mathcal{H}om(V, \mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale reale (se il V di partenza è reale) che è indicato con il simbolo V^* oppure $V^\vee$ e si chiama SPAZIO DUALE di V.

Fisso una base $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V

e poi definisco n forme lineari particolari:

$\varphi_1 : V \to \mathbb{R}$
$v_1 \mapsto 1$
$v_2 \mapsto 0$
$\vdots$
$v_n \mapsto 0$

$\varphi_2 : V \to \mathbb{R}$
$v_1 \mapsto 0$
$v_2 \mapsto 1$
$v_3 \mapsto 0$
$\vdots$
$v_n \mapsto 0$

$\dots \quad \varphi_j : V \to \mathbb{R}$
$v_i \mapsto \delta_{ij}$ *

* δ_{ij} è detto "simbolo di Kronecker" e vale:

1 se $i = j$
0 se $i \neq j$

φ_j sono definite $\forall$ elemento di $\mathcal{B}_V$: questo è sufficiente per definire φ_j su ogni vettore di V perchè sono lineari. E QUINDI:

$\Rightarrow$ Preso $v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \Rightarrow \varphi_j(v) = \alpha_1 \varphi_j(v_1) + \dots + \alpha_n \varphi_j(v_n)$

Voglio dimostrare che $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ determinano una base di V^*

1) Devono essere linearmente indipendenti:
poniamo una combinazione lineare di $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ pari al vettore nullo CIOÈ ALL'APPLICAZIONE NULLA
$a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n = 0$

cioè:
$(a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n)(v) = 0 \quad \forall v \in V \Rightarrow$ anche per gli elementi di $\mathcal{B}_V$ vale ciò

$\Rightarrow (a_1 \varphi_1 + \dots + a_n \varphi_n)(v_1) = 0 \Rightarrow a_1 \varphi_1(v_1) + \dots + a_n v_n(v_1) = 0$

Per come son definite $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$\Rightarrow a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + \dots + a_n \cdot 0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

Ripetendo lo stesso procedimento per ogni vettore di $\mathcal{B}_V$:

$$(a_1\varphi_1 + \dots + a_n\varphi_n)(v_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

2) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ generano V^*

cioè voglio dimostrare che dato $\psi : V \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists\ \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R} \mid \psi = \beta_1\varphi_1 + \dots + \beta_n\varphi_n$

$\forall v \in V$ voglio che $\psi(v) = (\beta_1\varphi_1 + \dots + \beta_n\varphi_n)(v)$

$\Rightarrow \psi(v) = \beta_1\varphi_1(v) + \dots + \beta_n\varphi_n(v) \quad \forall v \in V$

Vediamo per $v_i \in \mathcal{B}_V \Rightarrow \psi(v_i) = \beta_1\varphi_1(v_i) + \dots + \beta_i\varphi_i(v_i) + \dots + \beta_n\varphi_n(v_i)$

$\Rightarrow \psi(v_i) = \beta_1 \cdot 0 + \dots \beta_i \cdot 1 + \dots \beta_n \cdot 0 = \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ BASTA PRENDERE $\forall i = 1, \dots, n \quad \beta_i = \psi(v_i)$

Pertanto $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ generano V^* e formano una base di tale spazio.

Inoltre: ESSENDO LA CARDINALITÀ DELLA BASE UGUALE AD n SI HA

$\dim V^* = n = \dim V \Rightarrow \mathcal{B}_{V^*} = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ è detta

BASE DUALE della base di V

V e V^* sono <u>ISOMORFI</u>, per cui possiamo lavorare indifferentemente in V e in V^*

$\Rightarrow \exists$ un isomorfismo tra V e V^* (in realtà ne $\exists$ infiniti che dipendono dalla base scelta in $V \Rightarrow$ Non è un isomorfismo canonico)

Fissata dunque $\mathcal{B}_V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$\phi : V \to V^* \quad \text{con } \mathcal{B}_{V^*} = \{v_1^*, \dots, v_n^*\} \text{ base duale di } V$$

$$\begin{aligned} v_1 &\mapsto v_1^* \\ v_2 &\mapsto v_2^* \\ &\vdots \\ v_n &\mapsto v_n^* \end{aligned}$$

ESERCIZIO PER CASA: dimostrare che ϕ è isomorfismo

cioè che ϕ è
- lineare
- iniettiva
- suriettiva

FORME BILINEARI

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbb{R}$.

Definiamo FORMA BILINEARE un'applicazione $F: V \times V \to \mathbb{R}$

tale che:

1) $F((v_1 + v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w)) \quad \forall v_1, v_2, w \in V$

2) $F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $v, w \in V$

3) $F((v, w_1 + w_2)) = F((v, w_1)) + F((v, w_2)) \quad \forall v, w_1, w_2 \in V$

4) $F((v, \alpha w)) = \alpha F((v, w))$

In sostanza l'applicazione è lineare per entrambe le componenti.

$\boxed{\text{Esempio}}$

Prendiamo $V = \mathbb{R}$ e diamo l'applicazione $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → è una forma perchè va in $\mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto xy$$

è bilineare?

1) $F((x_1 + x_2, y)) = (x_1 + x_2) y$

$F((x_1, y)) + F((x_2, y)) = x_1 y + x_2 y$ SI per la proprietà distributiva in $\mathbb{R}$

2) $F((\alpha x, y)) = (\alpha x) y = \alpha (xy) = \alpha F((x, y))$ SI

3) $F((x_1, y_1 + y_2)) = x_1 (y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_1 y_2$

$F((x_1, y_1)) + F((x_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2$ SI

4) $F((x_1, \alpha y_1)) = x_1 (\alpha y_1) = \alpha x_1 y_1$

$\alpha F((x_1, y_1)) = \alpha x_1 y_1$ SI

Pagina 4 19/03/2012

F è bilineare poiché soddisfa tutte e 4 le condizioni.

Ma è lineare?

~~$F((x_1+y_1)+(x$~~

$F((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = F((x_1+x_2,\ y_1+y_2)) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) =$
$= x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_2$

MENTRE $F((x_1,y_1))+F((x_2,y_2)) = x_1y_1+x_2y_2$

SONO DIVERSI! => NO => In generale una forma bilineare non è anche lineare.