p. 1 18/04/2012

Teorema

Data una forma quadratica:

$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

tale che $A = [Q]_B$ (con B base iniziale di $\mathbb{R}^n$), $A \in M_{n\times n}$ simmetrica

tale che i minori principali di N-O (nord-ovest) $d_i \neq 0 \ \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\Rightarrow \exists \text{ una base } \tilde{B} \text{ di } \mathbb{R}^n \text{ tale che } [Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & & & \\ \vdots & & \frac{d_3}{d_2} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Dimostrazione (da aggiungere alla parte della volta scorsa)

ABBIAMO DIMOSTRATO CHE:

$$\exists \text{ base } B' \text{ di } \mathbb{R}^n \text{ tale che } [Q]_{B'} = \begin{pmatrix} \underbrace{a_{11}}_{= d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad B \in M_{(n-1)\times(n-1)}$$

Dimostriamo l'induzione su n (che è l'ordine della matrice).
Supponiamo dunque dimostrata la proposizione per matrici fino all'ordine $n-1$.

Siano $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ i minori principali di N-O della matrice B.

$\Rightarrow \delta_1 a_{11} = d_2' = d_2$

$\Rightarrow$ E così per tutti gli altri: $\delta_2 a_{11} = d_3' = d_3, \dots, \delta_{n-1} a_{11} = d_n' = d_n$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{d_2}{a_{11}}, \quad \delta_2 = \frac{d_3}{a_{11}}, \dots, \delta_{n-1} = \frac{d_n}{a_{11}}$$

$\Rightarrow$ Per ipotesi di induzione $\exists$ una base B_{n-1} di $\mathbb{R}^{n-1}$ tale $[Q]_{B_{n-1}} = [Q|_{\langle\langle \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n \rangle\rangle} =$

$$= \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2/\delta_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \delta_{n-1}/\delta_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_2}{d_1} & & & 0 \\ & \frac{d_3}{d_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{d_n}{d_1} \cdot \frac{d_1}{d_{n-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_2}{d_1} & & 0 \\ & \frac{d_3}{d_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \begin{pmatrix} \frac{d_2}{d_1} & & & \\ & \frac{d_3}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ pongo $\tilde{B} = \{ w_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n \} \Rightarrow [Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2/d_1 & & & \\ & & d_3/d_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$

c. v. d.

Considero il vettore X nella base $\tilde{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{\tilde{B}}$$

$$\Rightarrow Q(X) = X^T [Q]_{\tilde{B}} X = X^T D X = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \dots + \alpha_{nn} x_n^2$$

con $[Q]_{\tilde{B}} = D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$

Questo modo di scrivere la forma quadratica si dice <u>FORMA CANONICA di Q.</u>
In questo modo conosciamo subito la natura di Q (definita positiva, definita negativa, ecc.) e dunque la sua segnatura. Infatti:

se $\alpha_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$ la segnatura di Q è $(n, 0) \Rightarrow Q$ è definita positiva

se $\alpha_{ii} < 0 \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$ " " " è $(0, n) \Rightarrow Q$ è DEFINITA NEGATIVA

IL CRITERIO DI POSITIVITÀ CHE DERIVA DAL METODO DI JACOBI NON FORNISCE LA NUOVA BASE.

VEDIAMO UN ALTRO METODO!

 18/04/2012

Metodo di Gauss per la riduzione di una forma quadratica a forma canonica:

Tale metodo si basa su 2 identità algebriche:

① $x^2 + 2axy = x^2 + 2axy + a^2y^2 - a^2y^2 = (x+ay)^2 - a^2y^2$

② $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

Esempio

Sia $Q(x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

$Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che la base iniziale di $\mathbb{R}^3$ sia quella canonica

- Riscriviamo $Q(x)$ mettendo vicini tutti i termini con x_1 (nell'esempio sono già vicini per cui la riscriviamo uguale):

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + 2x_1(-2x_2+x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 =$$

per l'identità ①

$$= [x_1 + (-2x_2+x_3)]^2 - (-2x_2+x_3)^2 + 4x_2^2 + x_3^2 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + 4x_2x_3$$

- Ora cambio le coordinate (cioè cambio la base):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(Y) = y_1^2 + 4y_2y_3 = y_1^2 + (y_2+y_3)^2 - (y_2-y_3)^2$$

è sistemato

per l'identità ②

· Cambio nuovamente base:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \Rightarrow Q(Z) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 = (+1)\cdot z_1^2 + (+1)\cdot z_2^2 + (-1)\cdot z_3^2$$

$\Rightarrow$ Abbiamo 2 termini positivi e uno negativo $\Rightarrow$ segnatura di $Q = (2,1)$

$\Rightarrow [Q]_B$ non è degenere (ha rango massimo) $\Rightarrow [Q]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

• Possiamo ora determinare la base B, IN CUI $[Q]_B$ È $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. ~~per cui determiniamo~~ il cambiamento di coordinate complessivo da (x_1, x_2, x_3) a (z_1, z_2, z_3):

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Notiamo che la nuova base B è F-ortogonale (dove F_Q è la forma polare di Q).

Notiamo anche che "cambiamento" base PUÒ ESSERE VISTO COME L'APPLICAZIONE IDENTITÀ, CIOÈ abbiamo applicato l'identità:

$$id: (\mathbb{R}^3, e) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, B) \qquad [id]_e^B = A$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (z_1, z_2, z_3)$$

Possiamo anche ragionare nel modo inverso cercando:

$$id^{-1}: (\mathbb{R}^3, B) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, C) \qquad [id]_B^C = A^{-1}$$

Dal sistema sappiamo che:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Detta $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Le colonne di A^{-1} sono i vettori della base B espressi nelle coordinate rispetto a C

$\Rightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \boxed{A^{-1} \text{ è la matrice } S \mid [Q]_B = S^T [Q]_C S}$.

P. 3 18/04/2012

Dimostrazione del metodo di Gauss

Procediamo per induzione sul numero di variabili

1) $n = 1$ ovvio!

2) Supponiamo di poter ridurre a forma canonica tutte le forme quadratiche con $(n-1)$ variabili, cioè $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^2$.

Sia $Q(x_1, \dots, x_n)$ e supponiamo che $\exists$ un termine al quadrato, ad esempio:

$$Q(x_1, \dots, x_n) = a_{11} x_1^2 + R(x_2, \dots, x_n) x_1 + S(x_2, \dots, x_n)$$

dove: $R(x_2, \dots, x_n)$ è forma lineare NELLE VARIABILI $x_2, \dots, x_n$

$S(x_2, \dots, x_n)$ è forma quadratica NELLE VARIABILI $x_2, \dots, x_n$

$$\Rightarrow Q(X) = a_{11} \left(x_1^2 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)}{a_{11}} x_1 \right) + S(x_2, \dots, x_n) =$$

$$= a_{11} \left(x_1 + \frac{R(x_2, \dots, x_n)}{2 a_{11}} \right) \underbrace{- \frac{R^2}{4 a_{11}} + S}$$

$S'(x_2, \dots, x_n)$ è una forma quadratica in $x_2, \dots, x_n$

Effettuo un cambio di variabile:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \dfrac{R(x_2, \dots, x_n)}{2 a_{11}} \\ y_2 = x_2 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(Y) = a_{11} y_1^2 + S'(y_2, \dots, y_n)$$

$\Rightarrow$ Per ipotesi induttiva S' si può ridurre a una somma di quadrati (poichè ha $n-1$ variabili)

$\Rightarrow$ Q può essere ridotta a una somma di quadrati.

Supponiamo ora che compaia solo il termine misto x_1x_2 e non x_1^2 e x_2^2.

$$\Rightarrow Q(x) = a_{12}x_1x_2 + R(x_3, \dots, x_n)x_1 + S(x_3, \dots, x_n)x_2 + T(x_3, \dots, x_n)$$

Con: R, S forme lineari NELLE VARIABILI $x_3, \dots, x_n$

T forma quadratica NELLE VARIABILI $x_3, \dots, x_n$

$$\Rightarrow Q(X) = a_{12}\left(x_1 + \frac{S}{a_{12}}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a_{12}}\right) + T - \frac{RS}{a_{12}}$$

Cambio variabili:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{S}{a_{12}} \\ y_2 = x_2 + \frac{R}{a_{12}} \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(Y) = a_{12}y_1y_2 + T - \frac{RS}{a_{12}} = a_{12}\frac{(y_1+y_2)^2 - (y_1-y_2)^2}{4} + T - \frac{RS}{a_{12}}$$

Cambio ancora variabili:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_2 \\ z_2 = y_1 - y_2 \\ z_3 = y_3 \\ \vdots \\ z_n = y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow Q(Z) = \underbrace{\frac{a_{12}}{4}z_1^2 - \frac{a_{12}}{4}z_2^2}_{\text{Sono 2 quadrati}} + T - \frac{RS}{a_{12}} \longrightarrow$$ Per ipotesi induttiva possiamo ridurla a somma di quadrati

$\Rightarrow Q(Z)$ È DATA COME SOMMA DI QUADRATI

c.v.d.