18/01/2012

CONSIDERIAMO UNO SPAZIO VETTORIALE V n dimensionale: fissata una base $\mathcal{B}$ di V $\longrightarrow$ si può definire l'applicazione $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$v \longmapsto [v]_{\mathcal{B}} = (x_1, \dots x_n)$$

PROPOSIZIONE

- Voglio dimostrare che φ è un isomorfismo tra gli spazi vettoriali V ed $\mathbb{R}^n$

Se lo dimostro, dimostro che ogni spazio vettoriale (N-DIMENSIONALE) è $\mathbb{R}^n$ CIOÈ SI PUÒ IDENTIFICARE CON $\mathbb{R}^n$ MEDIANTE L'APPLICAZIONE DATA

ESEMPIO:

Lavoro con una matrice DI $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ $\Rightarrow$ UNA SUA BASE È

$$\mathcal{B}_{M_{2\times2}} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$\Rightarrow$ PRESA TALE BASE CANONICA SI HA:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\,e_1 + b\,e_2 + c\,e_3 + d\,e_4$$

$\Rightarrow$ ESSENDO $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ UNO SPAZIO VETTORIALE 4-DIMENSIONALE POSSO DARE L'ISOMORFISMO $\varphi : M_{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ TALE CHE $\varphi(A) = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

Qualunque sia lo spazio vettoriale V, fissata una base, se $\dim V = n$, $\Rightarrow$ è lo spazio $\mathbb{R}^n$ e di conseguenza (POSSIAMO SEMPRE) lavorare con ennuple di numeri reali INVECE CHE CON GLI ELEMENTI DELL'INSIEME V.

- Per poter affermare ciò, devo dimostrare che φ è UN ISOMORFISMO, CIOÈ lineare e biettiva.

DIMOSTRAZIONE

- La linearità è dimostrata ~~dalla~~ SFRUTTANDO LE proprietà di $\mathbb{R}^n$ (FARE PER ESERCIZIO)

- Per dimostrare che è biettiva: - dimostro che:

1) La dimostrazione dell'iniettività si riduce a verificare che $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{ v \in V \mid \varphi(v) = 0 \} = \left\{ v \in V \,\middle|\, [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Longrightarrow$$

SAPPIAMO CHE
$v = 0 \in Ker\varphi$: $\exists\, v \neq 0 \,/\, [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$? No, perché la rappresentazione di un vettore come coordinate in una base fissata è unica. Di conseguenza $\Rightarrow Ker\varphi = \{0\}$.
Per il teorema delle dimensioni: $\dim Im\varphi = \dim V - \dim Ker\varphi =$
$= n - 0 = n$. Essendo $Im\varphi < \mathbb{R}^n \Rightarrow Im\varphi \equiv \mathbb{R}^n$

e quindi φ è suriettiva.
c.v.d.

<u>Proposizione</u>: 1) Data un'applicazione L $V \longrightarrow W$ lineare $\Rightarrow$ se L è iniettiva $\Rightarrow$ le immagini di vettori l. indipendenti costituiscono un insieme di vettori l. indipendenti.

2) Supposte $\dim V = n$ e $\dim W = p$, dati n vettori $v_1, \dots, v_n$ di V l. indipendenti ed n vettori qualunque $w_1, \dots, w_n$ di W allora $\Rightarrow$ esiste sempre un'applicazione lineare T $V \longrightarrow W$ tale che $T(v_j) = w_j$ $\forall\, j = 1, \dots n$.

3) La proposizione 2 non è sempre vera se i vettori del dominio non sono l. indipendenti.
(Ad esempio se prendo $v_1, v_2 \in V / v_2 = 2v_1 \Rightarrow T(v_2) = T(2v_1) = 2T(v_1) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ i $w_1, w_2 \in W$ dati, devono soddisfare la relazione $w_2 = 2w_1$ se vogliamo trovare T lineare)

- Dimostrazione 1) Dati $v_1, \dots, v_n \in V$ considero $L(v_1), \dots, L(v_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ posto $a_1 L(v_1) + \dots + a_n L(v_n) = 0 \Rightarrow L(a_1 v_1) + \dots + L(a_n v_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0$ essendo L iniettivo $\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ POICHE' I VETTORI $v_1, \dots, v_n$ SONO LIN. INDIPEND.

cvd

MATRICI ASSOCIATE

Considero endomorfismi (detti anche operatori) cioè applicazioni lineari $T: V \to V$ con base di V dominio = base di V codominio: ($\mathcal{B}$). E sia $[T]_{\mathcal{B}}$ la matrice associata all'operatore T nelle basi date. Se cambio base in entrambi gli spazi $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ posta $\mathcal{B}'$ la nuova base di V, la matrice associata a T CAMBIA e sarà: $[T]_{\mathcal{B}'}$: cerco la relazione tra tali matrici.

Diamo il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
(V, \mathcal{B}) \arrow[r, "T"] & (V, \mathcal{B}) \arrow[d, "id_V \to \text{pongo } S^{-1} = [id_V]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}"] \\
(V, \mathcal{B}') \arrow[u, "{[id_V]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = S \leftarrow id_V}"] \arrow[r, "T"'] & (V, \mathcal{B}')
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow T = id_V \circ T \circ id_V \Rightarrow [T]_{\mathcal{B}'} = S^{-1} \cdot [T]_{\mathcal{B}} \cdot S$

ESERCIZIO 1)

DIMOSTRARE PER ESERCIZIO CHE: $[id_V]^{B'}_{B} = \left([id_V]^{B}_{B'} \right)^{-1}$

ESERCIZIO 2) DATA $T: (V, B_V) \longrightarrow (W, B_W)$ APPLICAZIONE LINEARE INVERTIBILE TRA GLI SPAZI VETT. V e W DI UGUAL DIMENSIONE E BASI B_V, B_W

POSTA T^{-1} L'APPLICAZIONE INVERSA $\Rightarrow [T^{-1}]^{B_V}_{B_W} = \left([T]^{B_W}_{B_V} \right)^{-1}$

__Definizione__: Date due matrici $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, A e B si dicono simili se $\exists$ una matrice $S \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertibile, tale che $B = S^{-1} A S$. Poniamo $A \sim_s B$ per indicare la similitudine.

__Osservazione__

1. Questa relazione tra matrici di uno spazio $M_{n\times n}$ è una relazione di equivalenza. (dimostrare).
2. Matrici associate allo stesso operatore in basi diverse, sono simili e pertanto una __classe di similitudine__ di matrici di ordine n __rappresenta un operatore__.

__Esercizio__

1. dare la relazione tra i determinanti di matrici simili.
2. dare la relazione tra i ranghi di matrici simili.

__Esercizio__ **DA FARE**

Sia $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotazione nel piano di angolo θ E VERSO POSITIVO CON $0 \leq \theta \leq \pi$.
Fissata la base canonica in $\mathbb{R}^2$ DARE $[\rho]_e$

$0 \leq \theta \leq \pi$

Risultato

$$\left([\rho]_e \begin{pmatrix} \cos\theta & -\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \right)$$