PROPRIETÁ DETERMINANTE   il det. si calcola solo di matrici quadrate.   17/10/2011

1) Se una matrice quadrata ha una riga con tutte le entrate nulle, allora il suo determinante vale 0.

ogni discorso vale indistintamente sia per qualunque riga, sia per qualunque colonna.

Esempio: $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 0+0+0=0$

→ Nella sommatoria dei determinanti delle varie sottomatrici, per determinare i segni ($0+, 0-$), oltre al procedimento dato dalla def. ($(-1)^{i+j}$), si può pensare anche di dividere la matrice originale in una scacchiera e attribuire quindi ad ogni casella alternativamente segno + e segno −.

*

2) Se una matrice $A \in M_{n \times n}$ triangolare inferiore (o superiore) $\Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} \cdots a_{nn}$

Dimost. per INDUZIONE su n (→ORDINE DELLA MATRICE)

Metodo per dimostrare le proposizioni che valgono SOLO per numeri naturali.

Si basa infatti su un assioma dato da Peano, il quale afferma nel suo quinto assioma che:

"se considero un sottoinsieme di N che contiene lo 0 (il più piccolo naturale) e, TALE CHE SE CONTIENE un numero naturale n, il sottoinsieme contiene anche il suo successivo $n+1$, allora il sottoinsieme è N".

TALE ASSIOMA VIENE APPLICATO A QUESTA SITUAZIONE:

Sia $A = \{ n \in N \mid P(n) \text{ è vera} \}$, dove $P(n)$ è una proposizione che è definita per i numeri naturali. ⇒ Se $0 \in A$ (o se $P(n)$ è vera per il più piccolo naturale possibile) e se posta vera per un naturale $k (\in N) \Rightarrow P(n)$ è vera per $k+1 \Rightarrow A = N$ per l'assioma di Peano.

DUNQUE:

La dimostrazione per induzione dimostra che la proposizione valga per ogni $n \in N$.

IL PRIMO PASSO DELLA DIMOSTRAZIONE E' LA VERIFICA PER IL PRIMO NATURALE AMMISSIBILE:

• Verifico per $n=1$ (MATRICE DI ORDINE 1) $\Rightarrow A = a_{11} \Rightarrow |A| = a_{11}$ BANALMENTE VERO.

$n=2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$ VERO

ORA

Supponiamo dunque la proposizione verificata fino all'ordine k della matrice e dimostriamola per l'ordine $k+1$.

⇓

$$A_{(k+1)\times(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(k+1),1} & a_{(k+1),2} & \cdots & \cdots & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \\ a_{(k+1),2} & a_{(k+1),3} & \cdots & & a_{(k+1),(k+1)} \end{vmatrix}$$

Per ipotesi induttiva, il determinante di una matrice triangolare inferiore di ordine k è dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale. $\Rightarrow$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{(k+1)(k+1)}$$

La proprietà è dimostrata per ogni $n \in \mathbb{N}$.

LA DIMOSTRAZIONE PER LA MATRICE ~~DIAGONALE~~ TRIANGOLARE SUPERIORE È IDENTICA.

3) Se A è DIAGONALE $\Rightarrow$ $|A| = \prod_{j=1}^{n} a_{jj}$ OPERATORE DEL PRODOTTO (ANALOGO DELLA SOMMATORIA Σ)

4) Se in una matrice scambio fra loro due righe una successiva all'altra, $\Rightarrow$ il determinante cambia di segno: se A' è la nuova matrice così ottenuta $\Rightarrow$ $|A'| = -|A|$.

Dimost. per induzione

Partiamo da una matrice di ordine $n=2$. VERIFICHIAMOLO:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ $\qquad$ $|A'| = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22}$ $\qquad$ VERO!

Supposto che ciò sia vero per una matrice fino ad ordine k, dimostrare che sia vero per $k+1$. (DIMOSTRARLO)

Quindi lo SCAMBIO non è un'operazione DETERMINANTALE (il determinante risulta diverso) ed in particolare questo accade per lo scambio tra qualsiasi riga (o colonna) non solo se vicine.

5) Se moltiplico una riga di una matrice A per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$, ottenendo una nuova matrice A', equivalente ad A, $\Rightarrow$ $|A'| = \lambda \cdot |A|$.

OPERAZIONE NON DETERMINANTALE.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix} \to |A'| = \lambda a_{11}\cdot a_{22} - \lambda a_{12}\cdot a_{21} =$$
$$\lambda\cdot(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) = \lambda\cdot|A|$$

Non è necessaria qui una dimostrazione per induzione: BASTA RIFARE QUANTO FATTO PER UNA MATRICE $n\times n$.

6) Se $A\in M_{n\times n}$, ed $A' = \lambda\cdot A \Rightarrow |A'| = \lambda^n\cdot|A|$

7) Date $A,B\in M_{n\times n} \Rightarrow A\cdot B\in M_{n\times n}$ e $|AB|=|A|\cdot|B|$] FATTO SENZA DIMOSTRAZIONE

Si tratta in questo caso del teorema di Binét. (BINÉT)

8) Date $A,B \in M_{n\times n} \Rightarrow A+B\in M_{n\times n}$ e $|A+B| \neq |A|+|B|$

Questo si dimostra con un semplice esempio numerico. (DARE UN CONTROESEMPIO).

9) Sia $A\in M_{n\times n}$ | ~~A=~~

$$A=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_{i-1}\\R_i\\R_{i+1}\\\vdots\\R_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_{i-1}\\R_i'+R_i''\\R_{i+1}\\\vdots\\R_n\end{pmatrix} \Rightarrow \text{pongo } B=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_{i-1}\\R_i'\\R_{i+1}\\\vdots\\R_n\end{pmatrix} \text{ e } C=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_{i-1}\\R_i''\\R_{i+1}\\\vdots\\R_n\end{pmatrix} \Rightarrow$$

CONSIDERO LA RIGA R_i COME SOMMA DI DUE RIGHE R_i' e R_i''

$$\boxed{|A| = |B|+|C|}$$

Esempio:
$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad |A|=-2$$

LA SOMMA DÀ 1, 2

$$B=\begin{pmatrix}0&1\\3&4\end{pmatrix} \text{ e } C=\begin{pmatrix}1&1\\3&4\end{pmatrix};\ |B|=-3 \text{ e } |C|=1 \Rightarrow |B|+|C|=-2=|A|$$

10) CONSEGUENZA DELLA 9)

$$A=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\R_i\\R_J\\\vdots\\R_n\end{pmatrix} \quad R_i'=\alpha R_i+\beta R_j \Rightarrow A'=\begin{pmatrix}R_1\\R_2\\\vdots\\\alpha R_i+\beta R_J\\R_J\\\vdots\\R_n\end{pmatrix} \Rightarrow |A'| = \underbrace{\begin{vmatrix}R_1\\\vdots\\\alpha R_i\\\vdots\\R_J\\\vdots\\R_n\end{vmatrix}}_{=\alpha|A|} + \underbrace{\begin{vmatrix}R_i\\\vdots\\\beta R_J\\\vdots\\R_J\\\vdots\\R_n\end{vmatrix}}_{=0} = \alpha|A|+0=\alpha|A|$$

HA DUE RIGHE UGUALI

$\Rightarrow$ LA MATRICE EQUIVALENTE A' HA LO STESSO DETERMINANTE DI A SE LA RIGA CHE SI SOSTITUISCE È MOLTIPLICATA PER 1

Se $\alpha=1$, $|A'|=|A|$.

UNICA OPERAZIONE ELEMENTARE DETERMINANTALE

* 1°) Se una matrice A ha due righe uguali (o due colonne uguali) $\Rightarrow |A| = 0$

<u>Da dimostrare per induzione.</u> *(DA FARE)

Per $n=2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow$

1'') Se una riga di A è λ volte un'altra sua riga $\Rightarrow |A| = 0$.

$\rightarrow$ LA NULLITÀ DI UN DETERMINANTE NON CAMBIA SE APPLICATA QUALSIASI DELLE PROPRIETÀ e questo è il grande vantaggio. Spesso al di là del calcolare un determinante, quello che risulta utile è capire proprio se esso è nullo o meno.