GEOMETRIA 16-11-2011

Il numero massimo di vettori riga (LINEARMENTE INDIPENDENTI) di una matrice è detto **RANGO PER RIGA** della matrice stessa.

Considerando i vettori colonna di una matrice si definisce il **RANGO PER COLONNA** come il numero massimo di vettori colonna linearmente indipendenti.

Il rango per riga di una matrice A coincide con il rango per colonna di A e tale valore comune è chiamato il **RANGO** della matrice A.

Esercizio: Dati i vettori di $\mathbb{R}^5$ espressi nelle coordinate riferite alla base canonica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^5$, $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $V_2=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $V_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $V_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$ dire se sono linearmente indipendenti. Se no dire quanti e quali fra essi sono linearmente indipendenti.

Per def. posto $\alpha_1 V_1+\alpha_2 V_2+\alpha_3 V_3+\alpha_4 V_4=0 \Rightarrow$ cerchiamo gli α_j $j=1,2,3,4$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow$ da tale uguaglianza si ricava un sistema omogeneo di cui dobbiamo studiare il rango

$$\dots\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4=0\\ -\alpha_1+\alpha_3-\alpha_4=0\\ \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+3\alpha_4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-2&1&-1\\-1&0&1&-1\\0&1&1&1\\2&1&1&3\end{pmatrix}$$

devo calcolarne il rango

consideriamo una sottomatrice 4×4 e se il determinante è (DIVERSO DA) zero $\Rightarrow rg=4$, SE TUTTI I MINORI DI ORDINE 4 SONO NULLI altrimenti dobbiamo scalare e cercare un minore non nullo di ordine 3 e così a seguire:

consideriamo la ~~seconda~~ sottomatrice $\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&-2&1&-1\\-1&0&1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}$ e usiamo la seconda colonna: det. minore $=-2\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=-2(0+2)+0+2+2=0$

allora dobbiamo continuare a calcolare i minori ~~~~ di ordine 4 (che però TROVEREMO sono tutti nulli) $\Rightarrow rg\neq4$.

Consideriamo una sottomatrice 3×3 e calcoliamone il determinante

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ un minore $\neq 0$ di ordine 3, mentre tutti i minori d'ordine 4 sono nulli $\Rightarrow rg A = 3 \Rightarrow \exists$ 3 vettori linearmente indipendenti (quelli che formano la sottomatrice di ~~rango~~ DETERMINANTE $\neq 0$ sono sicuramente linearmente indipendenti, anche se non sono gli unici).

Data una matrice $A \Rightarrow$ posso considerare A come la matrice dei coefficienti di un sistema lineare omogeneo $\Rightarrow$ posso studiare lo spazio delle soluzioni di Σ_0: $Sol\,\Sigma_0$: è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ dove $n = \#$ colonne della matrice A. (dimostrarlo), $\dim Sol\,\Sigma_0 = n - rg A$

Le soluzioni fondamentali del sistema sono una base di tale sottospazio: infatti generano $Sol\,\Sigma_0$, perchè ogni altra soluzione è loro combinazione lineare e inoltre sono linearmente indipendenti per le scelte fatte dei valori dati ai parametri per determinarli. : INFATTI :

Sia $A \in \mathcal{M}_{p\times n} \Rightarrow \Sigma_0 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$

$A = (a_{ij})$

Sia $rg A = rg\,\Sigma_0 = r$ con ~~[illegible]~~ {in generale $r \leq$ al più piccolo tra p e n} cioè $r \leq \min\{p, n\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_{r+1}x_{r+1} + \alpha_{r+2}x_{r+2} + \dots + \alpha_n x_n \\ x_2 = \beta_{r+1}x_{r+1} + \beta_{r+2}x_{r+2} + \dots + \beta_n x_n \\ \vdots \\ x_3 = \omega_{r+1}x_{r+1} + \omega_{r+2}x_{r+2} + \dots + \omega_n x_n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ trovo le soluzioni fondamentali:

x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
λ_1	λ_2	$\dots$	λ_r	1	0	$\dots$	0
μ_1	μ_2	$\dots$	μ_r	0	1	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	0	0	$\dots$	0
σ_1	σ_2	$\dots$	σ_r	0	0	$\dots$	1

$\Rightarrow$ le soluzioni fondamentali sono $V_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_r \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dots$, abbiamo $n-r$ soluzioni

$$\dots v_{n-r} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

tali soluzioni generano $Sol\,\Sigma_0$: INFATTI

do i parametri alle variabili libere

x_1	x_2	$\dots$	x_r	x_{r+1}	x_{r+2}	$\dots$	x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				s_1	s_2	$\dots$	s_{n-r}

e calcolo le variabili legate (sostituendo i parametri)

$w_{r+1}s_1 + w_{r+2}s_2 + \dots + w_n s_{n-r}$ soluzione generale (che si può scrivere come combinazione lineare delle soluzioni fondamentali)

$\Rightarrow$ le soluzioni fondamentali sono generatori di Σ_0:

$$Sol\,\Sigma_0 = \langle\langle v_1, \dots, v_{n-r} \rangle\rangle$$

Ora dimostriamo che $v_1, \dots, v_{n-r}$ sono linearmente indipendenti:

prendo $\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_{n-r} v_{n-r} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \rho_2 \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_r \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \rho_{n-r} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_1 \lambda_1 + \rho_2 \mu_1 + \dots + \rho_{n-r} \alpha_1 = 0 \\ \vdots \\ \rho_1 \lambda_r + \rho_2 \mu_r + \dots + \rho_{n-r} \alpha_r = 0 \\ \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = 0 \\ \vdots \\ \rho_{n-r} = 0 \end{cases}$$

$r+1 \rightarrow$

$\Rightarrow$ sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_{n-r}\}$ è base di $Sol\,\Sigma_0$

($Sol\,\Sigma_0$ non cambia prendendo matrici equivalenti)

$\Rightarrow$

$A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ possiamo considerare il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe della matrice: $R(A) = \langle\langle R_1, \dots, R_p \rangle\rangle$

e il sottospazio di $\mathbb{R}^p$ generato dalle colonne di A: $\mathcal{C}(A) = \langle\langle \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n \rangle\rangle$

La dimensione di tali sottospazi, fissata A, coincide:

$\dim R(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \operatorname{rg} A$

Se $A' \sim A$ (matrici equivalenti) qual è la relazione tra $R(A)$ e $R(A')$?

i vettori di $R(A')$ sono combinazioni lineari dei vettori di A' che sono a loro volta combinazioni lineari dei vettori di A (e viceversa) $\Rightarrow R(A') = R(A)$

e qual è la relazione tra $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{C}(A')$? non coincidono: $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(A')$
ma $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(A')$

(dimostrarlo con un controesempio).