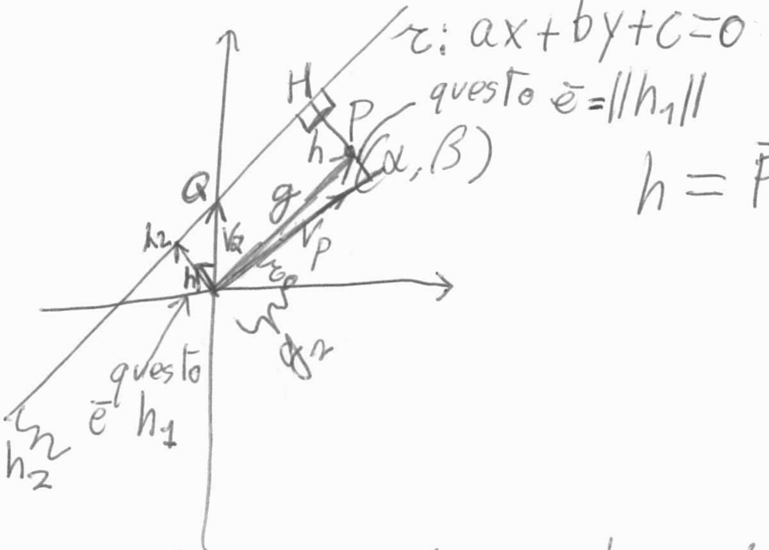
16/05/2012 ①

Distanza di un punto da una retta nel piano: con vettori Base canonica.



$h = \overline{PH}$

Considero: il vettore che identifica P: v_p

la direzione di r: r_0

$v_p = g + h_1$

Q, soluzione particolare DEL SISTEMA NON OMOGENEO CHE DEFINISCE LA RETTA r

$v_q = g_2 + h_2$

$\Downarrow$

$h = \|h_2\| - \|h_1\|$

<u>RISOLVERE</u> <u>PER</u> <u>ESERCIZIO</u>

~~Distanza di un punto da una retta nel piano~~: perpendicolarità fra rette in $\mathbb{R}^2$

$r: ax+by+c=0$

$s: a_1x+b_1y+c_1=0$

$r \perp s \Leftrightarrow \underbrace{r_0 \perp s_0}_{\text{direzioni di } r \text{ e } s}$

Se $l, m; l_1, m_1$ sono i parametri direttori di r e s risp.

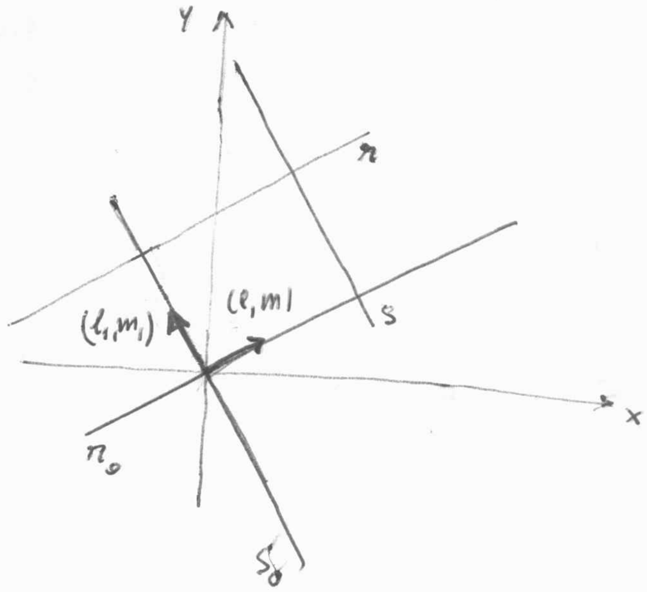
$\Downarrow$

$r \perp s \Leftrightarrow (l,m)\cdot(l_1,m_1)=0$

$\Rightarrow l l_1 + m m_1 = 0$ o anche $(b, -a)\cdot(b_1, -a_1)=0$

$\Downarrow$

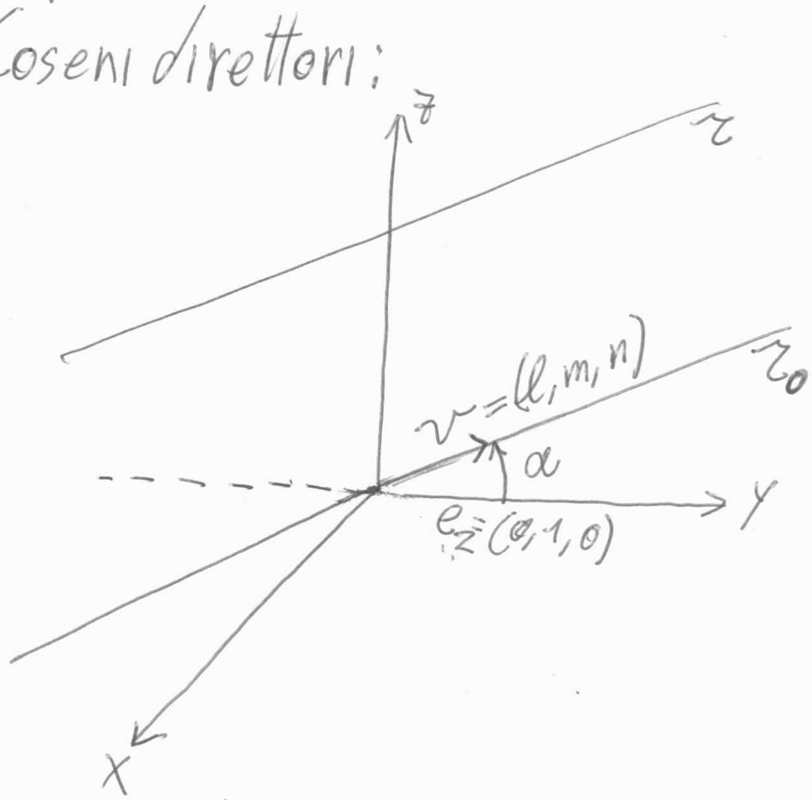
$b b_1 + a a_1 = 0$



16/05/2012 ②

Proprietà metriche nello spazio ($\mathbb{R}^3$)

Coseni direttori:



$$r \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

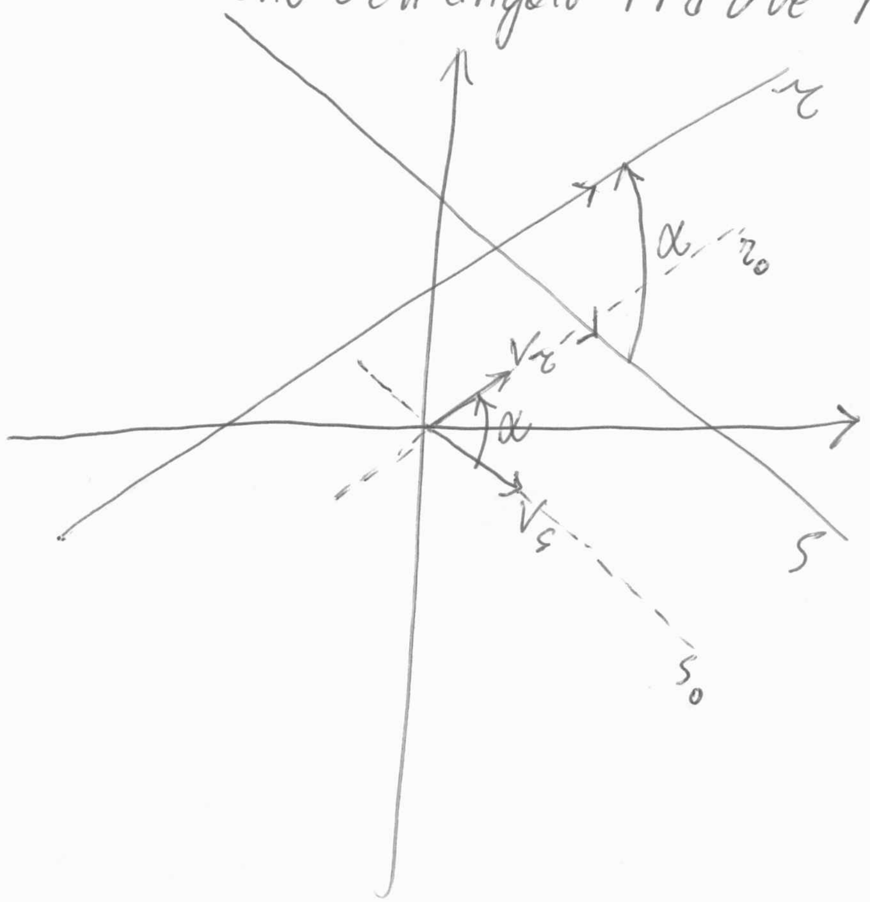
con (l, m, n) parametri direttori di r

per vedere l'angolo α tra r_0 e y, posso vedere il piano che passa per le due rette. Procedo poi come in $\mathbb{R}^2$.
Come visto in precedenza:

$$\cos\alpha = \pm \frac{v \cdot e_2}{\|v\| \cdot \|e_2\|} = \pm \frac{(l, m, n) \cdot (0,1,0)}{\|(l, m, n)\| \|(0,1,0)\|} = \pm \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

ottenuto coseno direttore relativo all'asse y.
(analogamente per x e z)

Ricerca del coseno dell'angolo fra due rette in $\mathbb{R}^2$:



$$\cos\alpha = \pm \frac{v_r \cdot v_s}{\|v_r\|\|v_s\|}$$

16/05/2012

Perpendicolarità tra rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + t l_1 \\ y = y_0 + t m_1 \\ z = z_0 + t n_1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = x_1 + t l_2 \\ y = x_1 + t m_2 \\ z = z_1 + t n_2 \end{cases}$$

$$r \perp s \Leftrightarrow r_0 \perp s_0$$

Se (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2) sono i parametri direttori di r e s

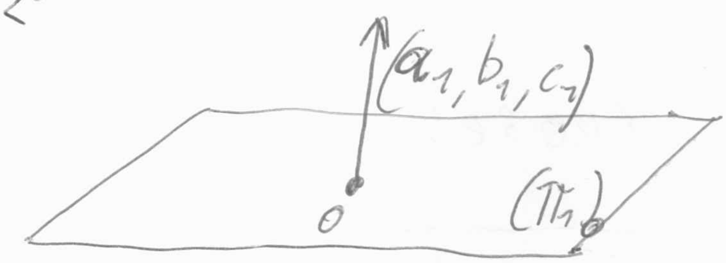
$$\Downarrow$$

$$r \perp s \Leftrightarrow (l_1, m_1, n_1) \cdot (l_2, m_2, n_2) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

Perpendicolarità tra piani in $\mathbb{R}^3$



$\pi_1: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$

$\pi_2: a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$

$(\pi_1)_0: a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$

Da questa equazione so che $(a_1, b_1, c_1) \cdot (x, y, z) = 0$ CIOÈ (*)

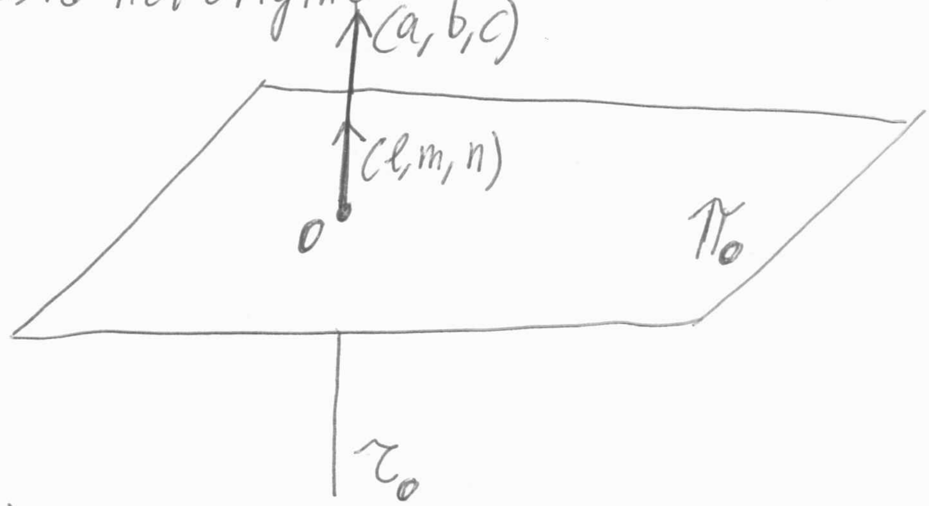
$\Downarrow$ (lo stesso si fa per π_2)

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow (a_1, b_1, c_1) \cdot (a_2, b_2, c_2) = 0 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

(*) (a_1, b_1, c_1) SONO LE COORDINATE DI UN VETTORE PERPENDICOLARE AL PIANO π_1

Perpendicolarità tra retta e piano in $\mathbb{R}^3$:

ci si trasla nell'origine

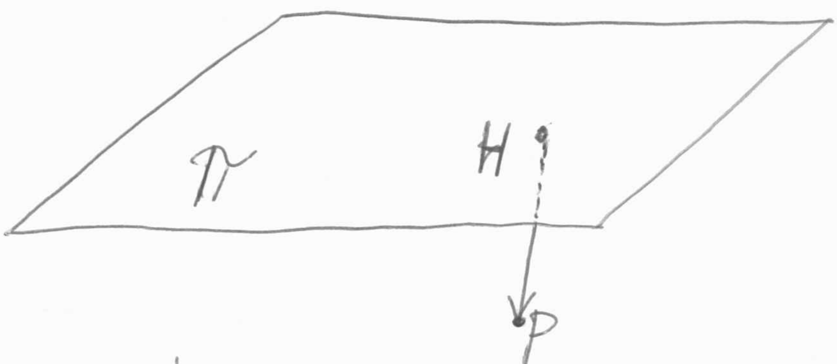


$$r: \begin{cases} x = x_0 + t\,l \\ y = y_0 + t\,m \\ z = z_0 + t\,n \end{cases} \qquad \pi: ax + by + cz + d = 0$$

Verifico se: $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$ (0 PER I RECIPROCI)

Distanza tra piano e punto P in $\mathbb{R}^3$:

È LA DISTANZA MINIMA FRA IL PUNTO P E I PUNTI DEL PIANO π



$\overline{PH}$ è distanza tra P e π SE SI CONSIDERA DUNQUE LA DISTANZA TRA P E H, INTERSEZIONE TRA π E LA RETTA PERPENDICOLARE A π PASSANTE PER P

Finire x casa

Distanza di un punto P da una retta in $\mathbb{R}^3$:

È LA DISTANZA MINIMA TRA P ED I PUNTI DELLA RETTA

Fare x casa

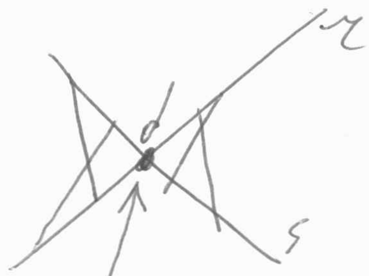
16/05/2012

Distanza tra due rette:

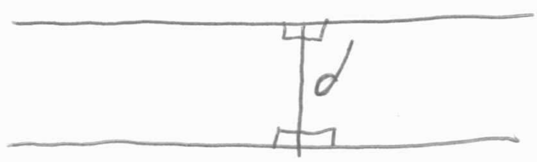
- in $\mathbb{R}^2$

se incidenti: $\Rightarrow$

distanza $= 0$



se parallele: $\Rightarrow$



DISTANZA È d
(DA DETERMINARE)

- in $\mathbb{R}^3$

rette <u>non</u> complanari, sghembe (FARE x casa)

—

SE LE RETTE SONO COMPLANARI: SI RICADE NEL CASO DEL PIANO.

Formule varie:

- Retta passante per $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e perpendicolare a $\pi: (ax+by+cz+d=0)$

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

- Piano passante per un punto P_1 e perpendicolare a $r: \begin{cases} x = x_0 + t\,l \\ y = y_0 + t\,m \\ z = z_0 + t\,n \end{cases}$

$$l(x-x_1) + m(y-y_1) + n(z-z_1) = 0$$

16/05/2012 OPERATORI ISOMETRICI

Sia $\mathbb{R}^n$ uno spazio euclideo n-dimensionale e
$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operatore su $\mathbb{R}^n$ (invertibile)

Definizione

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è detto "operatore isometrico" se,
$\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad T(v) \cdot w = v \cdot T^{-1}(w)$

Proprietà:

1) $\forall v \in \mathbb{R}^n, \ \|v\| = \|T(v)\|$

DIM:
$$\|T(v)\| = \sqrt{T(v) \cdot T(v)} = \sqrt{v \cdot T^{-1}(T(v))} = \sqrt{v \cdot v} = \|v\|$$

2) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad T(v) \cdot T(w) = v \cdot w$.

3) ~~se~~ dati v, w in $\mathbb{R}^n$, sia $\cos\alpha$ il cos dell'angolo tra v e w
$\Downarrow$
anche le loro immagini formeranno un angolo α

DIM.:
$$\cos\left(\widehat{T(v)\,T(w)}\right) = \frac{T(v) \cdot T(w)}{\|T(v)\| \cdot \|T(w)\|} = \frac{v \cdot T^{-1}(T(w))}{\|v\| \cdot \|w\|} = \cos(\widehat{vw})$$

Autovalori di un operatore isometrico:

Sia λ un autovalore $\Rightarrow \exists v \neq 0 \mid T(v) = \lambda v$

$$\underbrace{\|T(v)\|}_{=\|v\|} = \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Rightarrow |\lambda| \cdot \|v\| = \|v\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Matrice associata AD UN OPERATORE ISOMETRICO IN BASE ORTONORM.

Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ euclideo

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{[T(v)]_{\mathcal{B}}}_{Y} = \underbrace{[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}}_{A} \underbrace{[v]_{\mathcal{B}}}_{X}$$

$$T(v) \cdot T(v) = [T(v)]_{\mathcal{B}}^T \cdot I \cdot [T(v)]_{\mathcal{B}} = Y^T \cdot Y =$$

$$= (AX)^T \cdot A \cdot X = X^T A^T \cdot A \cdot X$$

ma

$$T(v) \cdot T(v) = v \cdot v \Rightarrow X^T A^T A \cdot X = X^T X \quad \forall X \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow$$

$$A^T \cdot A = I \Rightarrow A \text{ è ortogonale}$$

La matrice associata ad un operatore isometrico in una base orto-normale è ortogonale.