Invarianti della forma quadratica: RANGO, SEGNATURA (coppia di INDICI DI INERZIA).

Conoscere la segnatura, ovvero il segno, di una forma quadratica è fondamentale per conoscere la geometria dello spazio. Ad esempio quando si lavora in $\mathbb{R}^n$ si considera uno spazio la cui geometria è definita da una forma quadratica DEFINITA POSITIVA. Se si cambia (LA FORMA QUADRATICA DI DIVERSO) segno si ottiene uno spazio di geometria diversa.

→ Due modi per determinare il segno di una forma quadratica:

• Proposizione: CRITERIO DI JACOBY

Data una forma quadratica $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ⇒ indicati con "d_i" i minori principali di Nord-Ovest (di una matrice associata a Q in una base B) esiste una base B' di $\mathbb{R}^n$ tale che:

$$[Q]_{B'} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{d_3}{d_2} & & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & & 0 \\ & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

Ciascun minore $d_1, \dots d_{n-1}$ deve essere diverso da zero, altrimenti, essendo in $\mathbb{R}$, non può avvenire la divisione

In generale ricorda che si dicono "minori principali" di una matrice quadrata A i determinanti delle sottomatrici di A ottenute considerando k righe di A e le corrispondenti k colonne

Esempio: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1) $1 = a_{11}$ è un minore principale di ordine 1. a_{22} e a_{33} sono gli altri minori principali di ordine 1: non ce ne sono altri.

2) Minori principali di ordine 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

3) Minori principali di ordine 3: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \det A$

Fra i minori principali, quelli "di Nord-Ovest" sono costituiti dalle prime k righe e k colonne. Per questo esiste uno ed un solo minore principale di Nord-Ovest per ogni valore di k.

Dimostrazione del criterio di Jacobi:

Sia $A = [Q] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & & a_{nn} \end{pmatrix}$ (matrice simmetrica) e sia $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base iniziale $\Rightarrow$ considero i sottospazi $V_J = \langle\langle v_1, \dots, v_J \rangle\rangle$.

$V_J = 1, \dots, n \Rightarrow V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \dots \subset V_n$. Considero $Q\big|_{V_J}$ (forma quadratica Q ristretta ai sottospazi V_J: $Q\big|_{V_J} : V_J \longrightarrow R \Rightarrow [Q|_{V_J}]_{B_J} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1J} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1J} & \dots & & a_{JJ} \end{pmatrix}$

sottomatrice di A, per cui è ancora simmetrica.

Per ipotesi inoltre $\det [Q|_{V_J}]_{B_J} \neq 0$

ogni sottomatrice deve avere determinante non nullo, questo per quanto specificato precedentemente.

Considero ora $Q(X)$ con $X = [v]_B \Rightarrow Q(X) = X^T \cdot [Q]_B \cdot X =$

$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + \dots =$

(Raccogliamo a_{11}): $= a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n\right) + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots =$

(operiamo ora un completamento al quadrato): $= a_{11}\left(x_1^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{11}}x_1x_2 + \dots + 2\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_1x_n + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 x_2^2 + \dots + \left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)^2 x_n^2 + \dots - \left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2 x_2^2 - \dots\right) + a_{22}x_2^2 + \dots$

(si aggiungono ~~ora~~ e si tolgono fattori in modo da scrivere a tale forma):

$$Q(X) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots\right)^2 + Q_1(x_2, \dots, x_n).$$

Facciamo ora un cambio di variabile (che equivale a cambiare la base):

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \Rightarrow Q\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = a_{11}y_1^2 + Q_1(y_2, \dots, y_n) \Rightarrow$$

$$[Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & b_{21} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & b_{2n} & \dots & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$[Q]_{\tilde{B}} = S^T \cdot A \cdot S$, con S matrice del cambiamento di base.

Cerco S: $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} y_3 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n \\ x_2 = y_2 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases} \Rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & \cdot & 0 \\ 0 & \dots 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det [Q]_{\tilde{B}} = (\det S^T) \cdot \det A \cdot \det S = \boxed{= \det A}$$

POICHÈ $\det S = 1$

Quanto fatto può essere rivisto in ognuno dei sottospazi $\bar{V}_J$ e per qui restrizione della forma quadratica a tali sottospazi. Pertanto, il cambiamento di base effettuato non cambia i minori principali di Nord-Ovest della matrice A.

Il ragionamento che conclude la dimostrazione è fatto per induzione su n.

~~sottospazi V_J e quindi sulla restrizione di Q a tali sottospazi~~.

Verifichiamo per $n=2$ $\Rightarrow \left[Q\big|_{V_2} \right]_{\tilde{B}_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = d_2 \Rightarrow d_2 = a_{11} \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{d_2}{a_{11}}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{a_{11}} \end{pmatrix} \rightarrow$ questa è la matrice cercata.

In generale ~~per n~~ SUPPONIAMO VERIFICATA LA PROPOSIZIONE FINO AD $n-1$ E DIMOSTRIAMOLO ~~(considerato che per)~~ $\Rightarrow [Q]_{B'}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \\ & \boxed{B} \end{pmatrix}$.

Ma il teorema ~~per~~ è verificato per la matrice $B \in M_{(n-1)\times(n-1)}$ e quindi per induzione è verificato per tutta $[Q]$: INFATTI (VEDI (*))

COME COROLLARIO DI QUESTA PROPOSIZIONE SI DIMOSTRA IL

$\boxed{\text{CRITERIO DI JACOBY}}$: 1) Una forma quadratica è definita positiva $\Leftrightarrow$ i minori principali di Nord-Ovest di una sua matrice sono positivi.

2) Una forma quadratica è definita negativa $\Leftrightarrow$ i minori principali di Nord-Ovest, d_J, $J = 1, \dots n$ sono tali che $(-1)^J d_J > 0$.

Dimostrare per esercizio ~~i due punti del corollario~~ il criterio di Jacoby, corollario della proposizione precedentemente dimostrata.

Criterio 2: 1) Una forma quadratica Q è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ i minori principali di una qualunque matrice ad essa associata sono NON negativi.

2) Una forma quadratica Q è semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ i minori principali di ordine k di una qualunque matrice ad essa associata moltiplicati per $(-1)^k$ sono NON negativi.

Criterio 2 visto senza dimostrazione

SE Q E' SEMIDEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ I MINORI PRINCIPALI DI N-O SONO NON NEGATIVI MA IL VICEVERSA NON E' VERO!

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i minori di N-O sono entrambi nulli.

$Q(x) = X^T \cdot A \cdot X = -x_2^2$, ma $Q(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e quindi è semidefinita negativa. Questo giustifica il fatto che non bastino i minori di N-O, ma vanno guardati tutti i minori principali.

(*) Siano $\delta_1, \dots, \delta_{n-1}$ i minori principali di N-O di B

$$\Rightarrow \delta_1 a_{11} = d_2' = d_2 \; ; \; \delta_2 a_{11} = d_3' = d_3 \; , \dots , \; \delta_{n-1} \cdot a_{11} = d_n' = d_n$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \frac{d_2}{a_{11}} \; , \; \delta_2 = \frac{d_3}{a_{11}} \; , \dots , \; \delta_{n-1} = \frac{d_n}{a_{11}}$$

Ora per l'ipotesi di induzione applicata alla matrice B, $\exists$ una base dello spazio $\mathbb{R}^{n-1}$, $\tilde{B}_{n-1}$ tale che $[Q]_{\tilde{B}_{n-1}} = [Q|_{<<\tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \dots, \tilde{w}_{n-1}>>}]$

$$= \begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2/d_1 & & & 0 \\ & \frac{d_3}{\cancel{d_1}} \cdot \frac{\cancel{d_1}}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{d_n}{\cancel{d_1}} \cdot \frac{\cancel{d_1}}{d_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2/d_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n/d_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{con } \tilde{B} = \{w_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n\}$$

c.v.d.